# THE CLASSICAL GROUPS

## THEIR INVARIANTS
## AND REPRESENTATIONS

by
HERMANN WEYL

PROFESSOR OF MATHEMATICS
THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

1939

ГЕРМАН ВЕЙЛЬ

# КЛАССИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

## ИХ ИНВАРИАНТЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

*Перевод с английского*
Д. А. РАЙКОВА

1947
*Государственное издательство*
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

*Великому алгебраисту*
ИССАЙЕ ШУРУ
*в знак глубокого уважения*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

С тех пор как мне удалось в 1925 г., комбинируя инфинитезимальные методы Э. Картана и интегральный метод И. Шура, определить характеры полупростых непрерывных групп, я поставил своей целью вывести главные результаты для наиболее важных из этих групп, в частности, для полной группы невырожденных линейных преобразований и для ортогональной группы, прямым алгебраическим построением. Благодаря, главным образом, работам и сотрудничеству Р. Брауэра в течение последних нескольких лет, я в настоящее время обладаю всеми необходимыми для этого средствами. Задачу можно точно охарактеризовать следующим образом: разложить пространство тензоров заданного ранга на его неприводимые инвариантные подпространства относительно заданной группы линейных преобразований в положенном в основу векторном пространстве. Другими словами, предметом нашего изучения будут различные типы линейно преобразующихся „величин“, которые можно приготовить из материала тензоров при режиме той или иной группы. Такова проблема, образующая один из стержней этой книги, и, в соответствии с алгебраическим подходом, решение ее разыскивается не только в поле вещественных чисел, на котором анализ и физика разыгрывают свои сражения, но и в произвольном поле характеристики нуль. Однако я не пытался охватить поля простой характеристики.

Понятие алгебраического инварианта абстрактной группы $\gamma$ не может быть сформулировано, покуда мы не владеем понятием представления $\mathfrak{A}$ группы $\gamma$ линейными преобразованиями, или эквивалентным понятием „величины типа $\mathfrak{A}$“. Поэтому проблема нахождения всех представлений или величин группы $\gamma$ должна логически предшествовать проблеме нахождения алгебраических инвариантов этой группы. (По поводу понятий величин и инвариантов более общего характера и их тесной взаимосвязи отсылаем читателя к главе I, где эрлангенская программа

Клейна пересказана в несколько более абстрактных терминах.) Второй моей целью является — дать современное введение в теорию инвариантов. Уже давно пора омолодить классическую теорию инвариантов, впавшую почти в окаменелое состояние. Оправданием тому, что я придерживался значительно более консервативного стиля, чем это, вероятно, казалось бы желательным нашему молодому поколению алгебраистов, является нежелание жертвовать прошлым; но даже при этом, надеюсь, я достаточно решительно прокладывал путь к современным концепциям. Я не претендовал на то, чтобы написать *монографию* по современной теории инвариантов: систематическое руководство должно было бы содержать много вещей, обойденных здесь молчанием.

Как видно из предшествующего описания, предмет этой книги довольно специальный. Как бы важны ни были общие понятия и предложения, которыми одарило нас современное деятельное увлечение аксиоматизированием и обобщениями, распространенное в алгебре, быть может, больше, чем в какой бы то ни было другой области, — все же я убежден в том, что именно специальные проблемы во всей их сложности составляют опору и стержень математики; и преодоление их трудностей требует, вообще говоря, наиболее серьезных усилий. Разумеется, линия раздела здесь неопределенна и текуча. Однако общей теории представлений групп совершенно сознательно посвящено едва ли более двух страниц, тогда как применение этой теории к рассматриваемым группам частного вида занимает по крайней мере в пятьдесят раз больше места. Общие теории показаны здесь в их возникновении из специальных проблем, анализ которых приводит к этим теориям как действенному инструменту решения, с почти принудительной необходимостью; но однажды появившись, эти теории освещают широкую область за пределами ограниченного участка их возникновения. В этом духе мы изложим, среди прочих вещей, учение об ассоциативных алгебрах, возвысившееся в последнее десятилетие до руководящего положения в математике.

Связи с другими частями математики подчеркнуты здесь всюду, где к этому представляется случай, и несмотря на алгебраический, в основном, характер книги, не обойдены ни инфинитезимальный, ни топологический методы. Опыт подсказывает мне, что борьба с опасностью слишком сильной специализации и технизации математического исследования особенно важна в Америке. Строгая точность, достижимая математическим мышлением, привела многих авторов к манере изложения, которая должна произвести на читателя такое впечатление, как если бы он был заключен в ярко освещенную камеру, где каждая деталь выделяется с одинаково ослепляющей ясностью, но без рельефности. Я предпочитаю открытый ландшафт под ясным небом с его глубиной перспективы, где обилие отчетливо очерченных близких деталей постепенно сходит на-нет по мере удаления к горизонту. В частности, горный массив топологии лежит для этой книги и ее читателя у горизонта, и потому те его части, которые следовало поместить в картину, даны лишь в грубых чертах. От читателя ожидается здесь готовность переключаться на точки зрения, отличные от принятых в алгебраических частях, и добрая воля к сотрудничеству.

Книга предназначена, главным образом, для тех, кто скромно хочет узнать изложенные в ней новые вещи, а не для гордых ученых, уже знакомых с предметом и желающих лишь получить быструю и точную справку о той или иной детали. Она не является ни монографией, ни элементарным учебником. В том же духе составлены и ссылки на литературу.

Боги наложили на мои писания путы чужого языка, не звучавшего у моей колыбели.

„Was dies heissen will, weiss jeder,
Der im Traum pferdlos geritten“*),

— хотелось бы мне сказать вместе с Готфридом Келлером. Никто более меня не почувствует связанной с этим утраты силы, легкости и ясности выражения. Если, все же, удалось избежать хотя бы грубейших ошибок, то этим относительным достижением я целиком обязан преданному сотрудничеству моего ассистента, д-ра Альфреда Клиффорда; но еще более ценной, чем лингвистическая, была для меня его математическая критика.

*Герман ВЕЙЛЬ*

Принстон, Нью-Джерси,
сентябрь 1938.

Замечание. Ссылкой на формулу (7.6) [или (III.7.6)] указывается формула 6 в параграфе 7, обозначенная через (7.6) в *той же* главе [или, соответственно, в главе III].

---

*) „Что это значит — каждый знает,
Кто ездил во сне верхом без коня“.

# *ГЛАВА I*

# ВВЕДЕНИЕ

## 1. Поля, кольца, идеалы, полиномы

Прежде чем приступать к алгебре, следует фиксировать числовое *поле* $k$, в котором мы будем оперировать. $k$ — это замкнутая вселенная, в пределах которой протекают все наши действия. Я бы советовал читателю на первых порах мыслить себе $k$ континуумом обыкновенных вещественных или комплексных чисел. Но, вообще говоря, $k$ есть любая совокупность элементов $a$, называемых *числами*, замкнутая относительно двух бинарных операций: *сложения* и *умножения*. Сложение и умножение предполагаются *коммутативными* и *ассоциативными*. Кроме того, сложение должно допускать однозначное обращение (*вычитание*), т. е. существует число $o$, называемое *нулем*, такое, что

$$a + o = a$$

для каждого $a$, и для любого $a$ существует *противоположное* число $-a$, удовлетворяющее равенству $a + (-a) = o$. Умножение должно удовлетворять *закону дистрибутивности* относительно сложения:

$$a(\beta + \gamma) = (a\beta) + (a\gamma),$$

откуда легко следует, что

$$a \cdot o = o, \tag{1.1}$$

каково бы ни было $a$. Требуется также, чтобы умножение допускало обращение (*деление*), за одним исключением, необходимо вытекающим из (1.1); а именно, существует *единица* $\varepsilon$ или 1, удовлетворяющая для всех $a$ равенству

$$a \cdot \varepsilon = a, \tag{1.2}$$

и для каждого $a$, *за исключением нуля*, существует *обратное* число $a^{-1}$ или $\frac{1}{a}$ такое, что $a \cdot a^{-1} = \varepsilon$. При $\varepsilon = o$ все числа $a$ были бы, в силу (1.1) и (1.2), равны нулю; этот вырожденный случай мы раз навсегда исключим, приняв в качестве аксиомы, что $\varepsilon \neq o$.

Каждое число $a$ порождает совокупность его *кратных*

$$a = 1a, \qquad a + a = 2a, \qquad 2a + a = 3a, \ldots;$$

здесь натуральные числа 1, 2, 3, ... суть символы „мультипликаторов", а не числа рассматриваемого поля $k$. Возможны два случая: либо все кратные единицы

$$n\varepsilon \qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

отличны от $o$, либо существует наименьшее $n$, для которого $n\varepsilon = o$. В последнем случае это $n$ должно быть простым числом $p$. Действительно, для составного числа $n = n_1 n_2$ (где ни $n_1$, ни $n_2$ не равно 1) мы имели бы

$$n\varepsilon = n_1\varepsilon \cdot n_2\varepsilon = o,$$

и потому $n_1\varepsilon$, либо $n_2\varepsilon$ было бы равно $o$, в противоречие с предположением, что $n$ — *наименьшее* число, для которого $n\varepsilon$ обращается в нуль. Эти два случая различают, приписывая полю $k$, соответственно, *характеристику* 0 *или* $p$. В поле простой характеристики $p$ $p$-кратное каждого числа $a$ обращается в нуль:

$$pa = p(\varepsilon a) = (p\varepsilon)\, a = o.$$

В поле характеристики нуль можно для любого целого $n$ образовать $n$-ю долю $\beta = \frac{a}{n}$ числа $a$, т. е. найти число $\beta$, удовлетворяющее уравнению $n\beta = a$. Действительно, это уравнение равносильно уравнению

$$n\varepsilon \cdot \beta = a,$$

и так как первый множитель $n\varepsilon$ отличен от $o$, то последнее уравнение разрешимо по аксиоме делимости. Вследствие этого наше поле $k$ содержит под-поле рациональных кратных единицы $\varepsilon$:

$$\frac{m\varepsilon}{n} \qquad (n \text{ — любое натуральное число } 1, 2, 3, \ldots;$$
$$m \text{ — любое целое число } 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

последнее изоморфно полю обыкновенных рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и может быть отождествлено с ним. Это простейшее поле характеристики 0 мы будем называть *фундаментальным полем* $\varkappa$; таким образом, сделанное выше замечание устанавливает тот факт, что *каждое поле* $k$ *характеристики* 0 *содержит фундаментальное поле* $\varkappa$.

*Всюду в дальнейшем мы будем предполагать положенное в основу поле* $k$ *полем характеристики* 0, не напоминая в каждом случае этого ограничения. Ни одну из наших проблем мы не будем рассматривать в поле простой характеристики. Таким образом, даже употребляя выражение „в любом поле" или что-нибудь в этом роде, мы будем всегда подразумевать: „в любом поле характеристики 0".

Отбросив аксиому существования обратного числа $\alpha^{-1}$, мы вместо поля придем к общему понятию *кольца;* лишь сложение, вычитание и умножение возможны в кольце без всяких ограничений. Классическим примером кольца служит совокупность всех целых чисел. Если произведение $\alpha\beta$ двух элементов кольца никогда не обращается в нуль без обращения в нуль хотя бы одного из сомножителей, то говорят, что это кольцо *без делителей нуля.* Исходя из заданного кольца $R$ без делителей нуля, мы можем формально ввести дроби $\frac{\alpha}{\beta}$ как пары элементов $\alpha$, $\beta$, из которых $\beta \neq 0$, и затем определить равенство, сложение и умножение дробей согласно правилам, которым все мы учились в школе. Дроби образуют поле, *поле отношений* кольца $R$; оно содержит $R$, если отождествлять дроби $\frac{\alpha}{1}$ с $\alpha$.

По отношению к заданному кольцу $R$ множество $\mathfrak{a}$ его элементов называется *идеалом*, если

$$\alpha \pm \beta, \qquad \lambda\alpha$$

содержатся в $\mathfrak{a}$ для любых $\alpha$, $\beta$ из $\mathfrak{a}$ и любого $\lambda$ из $R$. Тот случай, когда $\mathfrak{a}$ состоит из одного лишь элемента 0, исключается по определению. Классический пример доставляется совокупностью целочисленных кратных заданного целого числа. Идеалы служат в качестве модулей для *сравнений*:

$$\lambda \equiv \mu \pmod{\mathfrak{a}}$$

означает, что разность $\lambda - \mu$ элементов $\lambda$, $\mu$ из $R$ содержится в $\mathfrak{a}$. Конечное число элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ идеала $\mathfrak{a}$ образует его *базис*, если каждый элемент $a$ из $\mathfrak{a}$ может быть представлен в виде

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r \qquad (\lambda_i \in R).$$

$\mathfrak{a}$ есть тогда идеал $(a_1, \ldots, a_r)$ с базисом $a_1, \ldots, a_r$. В *поле k* существует только один идеал — само это поле. Действительно, если $a$ есть число $\neq 0$ из заданного идеала $\mathfrak{a}$, то последний содержит все числа вида $\lambda a$, а следовательно, и всякое число $\beta$ вообще: $\lambda = \beta a^{-1}$. В кольце обыкновенных целых чисел каждый идеал является *главным идеалом* $(a)$. $\mathfrak{a}$ есть *простой идеал*, если сравнение

$$\lambda\mu \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a})$$

имеет место лишь в том случае, когда один из множителей $\lambda$, $\mu \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a})$.

Формальное выражение

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

содержащее „неизвестную“ (или переменную) $x$ и имеющее в качестве коэффициентов $a_i$ числа из поля $k$, называется ($k$-) *полиномом* от $x$ формальной степени $n$. Если $a_n \neq 0$, то $n$ есть истинная степень; 0 является единственным полиномом, не имеющим истинной степени. Каждому известно, как складывать и перемножать полиномы; они образуют кольцо $k[x]$ без делителей нуля. Действительно, если $a$ — полином истинной степени $m$ и $b$ — полином истинной степени $n$:

$$a = \alpha_m x^m + \ldots, \quad b = \beta_n x^n + \ldots \quad (\alpha_m \neq 0, \ \beta_n \neq 0),$$

то

$$ab = \alpha_m \beta_n x^{m+n} + \ldots$$

имеет истинную степень $m + n$, ибо $\alpha_m \beta_n \neq 0$. Ясно, что это предложение останется в силе, если коэффициенты брать не из поля, а из любого кольца без делителей нуля. Это дает возможность перейти к полиномам от нового неизвестного $y$ с коэффициентами, взятыми из $k[x]$, или, что то же самое, — к $k$-полиномам от *двух* неизвестных $x$, $y$, и т. д. *$k$-полиномы от нескольких неизвестных $x$, $y, \ldots$ образуют кольцо $k[x, y, \ldots]$ без делителей нуля.*

В заданном полиноме $F(u, v, \ldots)$ от неизвестных $u, v, \ldots$ можно произвести *подстановку*

$$u = f(x, y, \ldots), \quad v = g(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

с помощью определенных полиномов $f$, $g$, ... от некоторых других неизвестных $x$, $y$, ...; в результате получится полином $\Phi(x, y, \ldots)$ от $x$, $y$, ...:

$$F(f(x, y, \ldots), g(x, y, \ldots), \ldots) = \Phi(x, y, \ldots).$$

В частности, вместо „аргументов“ $u$, $v$, ... можно подставить в $F$ *числа* $\alpha$, $\beta$, ...; получающееся в результате число $F(\alpha, \beta, \ldots)$ называется *значением полинома $F$ при значениях* $\alpha$, $\beta$, ... *аргументов* $u$, $v$, ...

$\alpha$ есть *корень* полинома $f(x)$ от $x$, если $f(\alpha) = 0$. Полином степени $n$ имеет, самое большее, $n$ различных корней; это устанавливается хорошо известным способом, путем доказательства того, что $f(x)$ содержит множители $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots$, если $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... — различные его корни. Это показывает, что полином $f(x) \neq 0$ не может обращаться в нуль для каждого значения $x$ из $k$, если только $k$ — поле характеристики 0, потому что такое поле содержит бесконечное множество чисел. Можно найти даже *рациональное* значение $x$, для которого значение $f \neq 0$. Индукция по числу неизвестных позволяет обобщить это предложение на полиномы с любым числом аргументов. Если

$$F(x, y, \ldots); \quad R_1(x, y, \ldots), \quad R_2(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

— $k$-полиномы, отличные от нуля, то произведение их $FR_1R_2\ldots$ также $\neq 0$; поэтому наше утверждение можно усилить следующим образом:

Лемма (I. 1. A). (Принцип несущественности алгебраических неравенств.) *$k$-полином $F(x, y, \ldots)$ тождественно равен нулю, если он обращается в нуль для всех систем рациональных значений $x = \alpha$, $y = \beta$, ..., удовлетворяющих конечному числу алгебраических неравенств*

$$R_1(\alpha, \beta, \ldots) \neq 0, \quad R_2(\alpha, \beta, \ldots) \neq 0, \quad \ldots$$

От кольца $k[x, y, \ldots]$ $k$-полиномов от $x$, $y$, ... можно перейти к *полю* $k(x, y, \ldots)$ *рациональных функций* от $x$, $y$, ... над $k$, образуя поле отношений для $k[x, y, \ldots]$.

*Производная* $f'(x)$ полинома $f(x)$ вводится как коэффициент при $t$ в разложении $f(x+t)$ как полинома от $t$:

$$f(x+t) = f(x) + t \cdot f'(x) + \ldots. \tag{1.3}$$

Известные формальные свойства производной являются непосредственными следствиями этого определения. Можно было бы перефразировать определение (1.3) следующим образом: существует полином $g(x, y)$, удовлетворяющий тождеству

$$f(y)-f(x)=(y-x)\cdot g(x, y); \tag{1.4}$$

$f'(x)$ есть $g(x, x)$. Тогда как в дифференциальном исчислении однозначная определенность производной $g(x, x)$ обеспечивается требованием *непрерывности* $g(x, y)$ при $y=x$, алгебра достигает того же требованием, чтобы $g$ было *полиномом*. Производной от

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

служит

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}.$$

Поэтому единственными полиномами $f(x)$ над полем характеристики 0, имеющими производную $f'(x)\equiv 0$, являются константы: $f(x)=a_0$.

Для полинома $f((x))=f(x_1, \ldots, x_n)$ от $n$ переменных $x_i$ можно, аналогично разложению (1.3), образовать разложение

$$\begin{aligned} f((x+t\cdot y))&=f(x_1+ty_1, \ldots, x_n+ty_n)= \\ &=f((x))+t\cdot f_1((x, y))+\ldots \end{aligned} \tag{1.5}$$

Коэффициент $f_1((x, y))$ при $t$ в этом разложении по степеням $t$ называется *поляризованным полиномом* $D_{yx}f$ от $f$; он содержит новые переменные $y_i$ однородным линейным образом:

$$D_{yx}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}y_n. \tag{1.6}$$

Иногда новые переменные $y_i$ обозначаются через $dx_i$ и тогда поляризованная форма называется *полным дифференциалом* $df$ *от* $f$. Поляризация обладает формальными свойствами дифференцирования:

$$\left\{\begin{aligned} &D(f+g)=Df+Dg, \\ &D(af) \quad =a\cdot Df \quad (a \text{ — число}), \\ &D(f\cdot g) \quad =Df\cdot g+f\cdot Dg. \end{aligned}\right. \tag{1.7}$$

Степенью *одночлена*

$$x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}$$

от наших $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма

$$r=r_1+r_2+\ldots+r_n$$

целых неотрицательных показателей $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Каждый полином $f((x))$ является линейной комбинацией одночленов; если все эти одночлены имеют одну и ту же степень $r$:

$$(1.8) \qquad f((x)) = \sum a_{r_1 \ldots r_n} x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} \qquad (r_1 + \ldots + r_n = r),$$

то полином называется *однородным* или *формой степени* $r$. В (1.8) сумма распространяется на все совокупности целых неотрицательных показателей $r_1, \ldots, r_n$ с суммой $r$. Умножение всех переменных $x_i$ на численный множитель $\lambda$ превращает

$$(1.9) \qquad f((x)) \text{ в } \lambda^r \cdot f((x)).$$

Другим способом записи такой формы является:

$$(1.10) \qquad f((x)) = \sum_{i=1}^{n} \beta(i_1 \ldots i_r) x_{i_1} \ldots x_{i_r},$$

где каждый из $r$ индексов $i$ независимо пробегает значения от 1 до $n$. В этом выражении коэффициенты $\beta$ определены неоднозначно; однако, они становятся уже однозначно определенными, если наложить на $\beta$ условие симметричности:

$$\beta(i_{1'}, \ldots i_{r'}) = \beta(i_1 \ldots i_r)$$

для любой перестановки $1', \ldots, r'$ ряда $1, \ldots, r$. Тогда коэффициенты $\beta$ из (1.10) очевидно связаны с коэффициентами $a$ из (1.8) следующим соотношением:

$$(1.11) \qquad a_{r_1 \ldots r_n} = \frac{r!}{r_1! \ldots r_n!} \beta(i_1 \ldots i_r),$$

если $r_1$ из $r$ индексов $i_\alpha$ равны 1, $r_2$ из этих индексов равны 2, ..., $r_n$ из них равны $n$.

(1.10) естественно подсказывает образование полилинейной формы

$$(1.12) \qquad f((x, y, \ldots, z)) = \sum \beta(i_1 i_2 \ldots i_r) x_{i_1} y_{i_2} \ldots z_{i_r},$$

зависящей от $r$ систем по $n$ переменных:

$$(1.13) \qquad \begin{cases} x = (x_1, \ldots, x_n), \\ y = (y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = (z_1, \ldots, z_n). \end{cases}$$

От формы (1.12) мы снова возвратимся к форме (1.10), отождествив

$$(1.14) \qquad x = y = \ldots = z \text{ с } x.$$

Симметричность коэффициентов $\beta$ относительно индексов $i_\alpha$ эквивалентна симметричности полилинейной формы $f(x, y, \dots, z)$ относительно перестановок $r$ систем $x, y, \dots, z$. Поэтому наш результат может быть выражен так: существует однозначно определенная симметричная полилинейная форма $f(x, y, \dots, z)$, переходящая при отождествлении (1.14) в заданную форму $f((x))$ степени $r$.

Полагая в (1.9) $\lambda = 1 + t$, находим, что поляризованная форма $D_{yx}f$ при замене $y$ на $x$ приводится к $r \cdot f$:

$$\{D_{yx}f(x)\}_{y=x} = r \cdot f(x).$$

То же самое явствует и из формулы (1.10), которая, в предположении симметричности коэффициентов $\beta$, сразу дает:

$$D_{yx}f = r \cdot \sum_{i_1, \dots, i_r} \beta(i_1 i_2 \dots i_r)\, y_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}.$$

Поэтому симметричная полилинейная форма $f(x, y, \dots, z)$, соответствующая заданной форме $f(u)$ степени $r$, получается из $f = f(u)$ путем *полной поляризации*:

$$D_{xu} D_{yu} \dots D_{zu} f(u) = r! \cdot \sum \beta(i_1 i_2 \dots i_r)\, x_{i_1} y_{i_2} \dots z_{i_r}.$$

Это снова доказывает ее единственность.

## 2. Векторное пространство

Следующим фундаментальным понятием, с которым мы должны вполне освоиться с самого начала, является понятие *векторного пространства* (*над* $k$). Векторное пространство P есть $k$-линейная совокупность элементов, называемых векторами, т. е. область, в которой сложение векторов и умножение вектора на число из $k$ являются допустимыми операциями, удовлетворяющими хорошо известным правилам векторной геометрии [1]. $n$ векторов $e_1, \dots, e_n$ образуют *систему координат* или *базис*, если они линейно независимы, но присоединение к ним любого другого вектора уже нарушает линейную независимость. При этих предположениях каждый вектор $\mathfrak{x}$ однозначно представляется в форме

$$\mathfrak{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \tag{2.1}$$

где числа $x_i$ суть „*компоненты*" вектора $\mathfrak{x}$. Число $n$ не зависит от выбора системы координат и называется *размерностью векторного пространства* P. Переход к другой системе координат $\mathfrak{e}'_1, \ldots, \mathfrak{e}'_n$ осуществляется с помощью невырожденного линейного преобразования $A$, описываемого матрицей $\| a_{ik} \|$ следующим образом:

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + x_n\mathfrak{e}_n = x'_1\mathfrak{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathfrak{e}'_n;$$

$$\mathfrak{e}'_i = \sum_k a_{ki}\mathfrak{e}_k, \qquad x_i = \sum_k a_{ik}x'_k \qquad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n). \tag{2.2}$$

Матрица $A = \| a_{ik} \|$ невырожденного линейного преобразования есть неособенная матрица, т. е. матрица, определитель которой, $\det A$ или $| A |$, отличен от нуля; обратное преобразование $A^{-1}$ переводит столбец из $n$ чисел $x'$ обратно в столбец $x$. Записывая компоненты в виде столбца (матрицы из $n$ строк и одного столбца), мы можем представить (2.2) в сокращенной матричной записи

$$x = Ax'. \tag{2.3}$$

Существует и другое истолкование этого или, лучше, видоизмененного равенства $x' = Ax$, состоящее в том, что это равенство описывает *линейное отображение* $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}'$ *пространства* P *на себя* в фиксированной системе координат. В этом случае мы не обязаны предполагать матрицу $A$ неособенной. Отображение $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}'$, переводящее каждый вектор $\mathfrak{x}$ в некоторый вектор $\mathfrak{x}'$, линейно, если оно переводит

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \text{ в } \mathfrak{x}' + \mathfrak{y}' \text{ и } a\mathfrak{x} \text{ в } a\mathfrak{x}'$$

($a$ — любое число из $k$). Если такое отображение заменяет базисные векторы $\mathfrak{e}_i$ нашей системы координат на

$$\mathfrak{e}'_i = \sum_k a_{ki}\mathfrak{e}_k,$$

то оно переводит

$$\mathfrak{x} = \sum_i x_i\mathfrak{e}_i \text{ в } \mathfrak{x}' = \sum_i x_i\mathfrak{e}'_i = \sum_i x'_i\mathfrak{e}_i,$$

где

$$x'_i = \sum_k a_{ik}x_k \text{ или } x' = Ax. \tag{2.4}$$

Тождественное отображение $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}$ представляется *единичной матрицей*

$$E_n = E = \| \delta_{ik} \|.$$

Линейное отображение $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}'$, заданное в некоторой системе координат формулой (2.4), в другой системе координат, в которой вектор $x$ имеет компоненты $y$, определяемые соотношением

$$x = Uy, \tag{2.5}$$

где $U$ — неособенная матрица, выражается формулой

$$y' = (U^{-1}AU)\, y;$$

в этом легко убедиться, комбинируя (2.4) и (2.5) с соотношением

$$x' = Uy' \text{ или } y' = U^{-1}x'.$$

Поэтому матрица $A$ заменяется матрицей $U^{-1}AU$, получающейся из $A$, как мы будем говорить, „трансформированием с помощью $U$“. Так как

$$|\lambda E - U^{-1}AU| = |U^{-1}(\lambda E - A)\, U| = |\lambda E - A|,$$

то отсюда следует, что *характеристический полином*

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} + \ldots \pm b_n$$

от неизвестной $\lambda$ не зависит от системы координат; в частности, не зависят от системы координат *след* (*trace*) $b_1$:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

и определитель

$$\det A = b_n.$$

Квадратная матрица $A$ из $n$ строк и $n$ столбцов называется матрицей $n$-го *порядка*.

В *алгебраической модели $n$-мерного векторного пространства* вектор означает просто ряд $\mathfrak{x}$ из $n$ чисел:

$$\mathfrak{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n).$$

Эти числа суть координаты вектора $\mathfrak{x}$ относительно „*абсолютной системы координат*“

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ \ldots, \ 0), \\ e_2 &= (0, 1, \ \ldots, \ 0), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_n &= (0, 0, \ \ldots, \ 1). \end{aligned}$$

Нашими рассмотрениями установлен тот простой факт, что каждое $n$-мерное векторное пространство, определенное в общем аксиоматическом смысле, изоморфно этой единой алгебраической модели.

*Линейную форму* $f(\mathfrak{x})$, зависящую от векторного аргумента $\mathfrak{x}$, можно определить без привлечения системы координат с помощью функциональных соотношений

$$f(\mathfrak{x}+\mathfrak{x}')=f(\mathfrak{x})+f(\mathfrak{x}'),\quad f(a\mathfrak{x})=a\cdot f(\mathfrak{x})\quad (a\text{ — число}).$$

Выражением ее в терминах системы координат будет линейная форма в алгебраическом смысле от компонент $x_i$ вектора $\mathfrak{x}$:

$$f(\mathfrak{x})=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$$

с постоянными коэффициентами $a_i$. Аналогично может быть определена и *полилинейная форма* $f(\mathfrak{x},\ldots,\mathfrak{z})$, зависящая от $r$ векторных аргументов $\mathfrak{x},\ldots,\mathfrak{z}$. При отождествлении $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}=\ldots=\mathfrak{z}$ она приводит к форме $f(\mathfrak{x})$ степени $r$ от одного векторного аргумента $\mathfrak{x}$. Тем же способом $f(\mathfrak{x})$ получается из каждой формы $sf(\mathfrak{x},\ldots,\mathfrak{z})$, в которую превращается $f(\mathfrak{x},\ldots,\mathfrak{z})$, если подвергнуть $r$ ее аргументов $\mathfrak{x},\mathfrak{y},\ldots,\mathfrak{z}$ подстановке $s$, и потому, в частности, из симметричной формы

$$\frac{1}{r!}\sum_{s} sf(\mathfrak{x},\ldots,\mathfrak{z}),$$

где сумма распространяется на все $r!$ подстановок $s$. Связь этих замечаний с рассмотрениями относительно алгебраических форм в конце первого параграфа ясна. Что́ такое форма степени $r$, значительно легче описать без помощи системы координат, а именно путем перехода через соответствующие полилинейные формы. Определение поляризованной формы с помощью разложения $f(\mathfrak{x}+t\cdot\mathfrak{y})$ по степеням параметра $t$ показывает, что поляризация инвариантна относительно замены координат. Естественным обобщением является изучение форм $f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\ldots)$, имеющих по отношению к различным своим векторным аргументам $\mathfrak{x},\mathfrak{y},\ldots$ предписанные степени $\mu,\nu,\ldots$ В применении к алгебраической модели векторного пространства наши независящие от нее определения показывают, что форма $f((x))=f(x_1,\ldots,x_n)$ степени $r$ переходит в такую же форму при любом линейном преобразовании (2.3); то же самое справедливо для формы, зависящей от нескольких рядов переменных (1.13), каждый из которых подвергается тому же преобразованию (2.3), что и $x$.

Пусть в $n$-мерном векторном пространстве $P$ задано $m$-мерное линейное подпространство $P_1$ ($m\leqslant n$). Систему координат $\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_m$ подпространства $P_1$ можно дополнить $n-m$ векторами $\mathfrak{e}_{m+1},\ldots,\mathfrak{e}_n$ до базиса всего пространства $P$. По отношению к этому базису, *приуроченному к* $\mathrm{P}_1$, векторы $x$ из $\mathrm{P}_1$ суть те, у которых последние $n-m$ компонент обращаются в нуль:

$$x=(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Поэтому универсальная алгебраическая модель для этой ситуации описывается так: векторы пространства $\mathrm{P}$ суть ряды из $n$ чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, векторы подпространства $\mathrm{P}_1$ суть ряды из $n$ чисел специального вида $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Факторпространство $\mathrm{P} \bmod \mathrm{P}_1$ есть $(n-m)$-мерное векторное пространство, в которое превращается $\mathrm{P}$, если отождествить любые векторы $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{x}'$, сравнимые по модулю $\mathrm{P}_1$, т. е. векторы, разность которых лежит в $\mathrm{P}_1$.

$\mathrm{P}$ *разлагается* на два линейных подпространства:

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2,$$

если каждый вектор $\mathfrak{x}$ единственным способом расщепляется на сумму $\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2$ вектора $\mathfrak{x}_1$ из $\mathrm{P}_1$ и вектора $\mathfrak{x}_2$ из $\mathrm{P}_2$. Однозначность разложения обеспечивается, если единственным разложением нуля:

$$0=\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2 \qquad (\mathfrak{x}_1 \in \mathrm{P}_1,\ \mathfrak{x}_2 \in \mathrm{P}_2)$$

является $0+0$, т. е. если подпространства $\mathrm{P}_1$ и $\mathrm{P}_2$ линейно независимы (не имеют ни одного общего вектора, кроме нулевого). Базис для $\mathrm{P}_1$ в соединении с базисом для $\mathrm{P}_2$ образуют систему координат для всего пространства $\mathrm{P}$ (*координаты, приуроченные к заданному разложению*); поэтому сумма $n_1+n_2$ размерностей подпространств $\mathrm{P}_1$ и $\mathrm{P}_2$ равна размерности $n$ пространства $\mathrm{P}$. По отношению к такой системе координат векторы из $\mathrm{P}_1$ и $\mathrm{P}_2$ имеют, соответственно, вид

$$(x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, \ldots, 0), \qquad (0, \ldots, 0, x_{n_1+1}, \ldots, x_n).$$

Слово „сумма" (но никогда не „разложение") будет иногда употребляться и в тех случаях, когда единственность или линейная независимость не имеют места. Процесс суммирования (независимых) подпространств легко распространяется на случай более чем двух слагаемых:

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}_1+\ldots+\mathrm{P}_t; \quad \mathfrak{x}=\mathfrak{x}_1+\ldots+\mathfrak{x}_t, \quad \mathfrak{x}_\alpha \in \mathrm{P}_\alpha;$$

независимость означает, что $0+\ldots+0$ является единственным разложением для 0 на компоненты, лежащие в подпространствах $\mathrm{P}_\alpha$.

Если линейное отображение $A$ переводит каждый вектор подпространства $P_1$ в вектор того же подпространства, то $P_1$ называется *инвариантным относительно* $A$, и отображение $A$ подпространства $P_1$ на себя называется преобразованием, „*индуцированным*“ в $P_1$ отображением $A$. Если система координат приурочена к подпространству $P_1$, то матрица $A$ имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{matrix} \right\|, \tag{2.6}$$

где $A_1$ — матрица порядка $m$, индуцированная матрицей $A$ в подпространстве $P_1$, тогда как $A_2$ можно истолковать как матрицу соответствующего преобразования факторпространства $P \bmod P_1$. В случае разбиения $P$ на два подпространства $P_1 + P_2$, каждое из которых инвариантно относительно $A$, матрица $A$ в системе координат, приуроченной к этому разложению, имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{matrix} \right\|. \tag{2.7}$$

Хорошо известно, как матрицы заданной степени $n$ складываются, умножаются на числа и друг на друга; умножение ассоциативно, но не коммутативно. *Транспонированная матрица* для матрицы $A = \|a_{ik}\|$ будет обозначаться через

$$A^* = \|a^*_{ik}\|, \qquad a^*_{ik} = a_{ki}.$$

Это — матрица подстановки

$$\xi' = \xi A,$$

где $\xi$ обозначает *строку* из чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Столбец $x$ из $n$ чисел будет называться *ковариантным*, а строка $\xi$ — *контравариантным вектором*. Из них можно образовать *произведение*

$$\xi x = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = (\xi x),$$

являющееся однострочной квадратной матрицей или числом. Если под влиянием перехода к новой системе координат $x$ подвергается невырожденному преобразованию $x = Uy$, то $\xi$ будет подвергаться контрагредиентному преобразованию

$$\xi = \eta U^{-1},$$

так что $\xi x$ останется неизменным:

$$\xi x = \eta U^{-1} U y = \eta y.$$

Мы рассматриваем ковариантные и контравариантные векторы как векторы в двух различных „*двойственных*“ пространствах $P$ и $P^*$. Преобразование координат в одном из них автоматически вызывает контрагредиентное преобразование координат в другом, так что произведение $\xi x$ имеет инвариантный смысл. Отображение $x \longrightarrow x' = Ax$ инвариантным образом связано с отображением $\xi \longrightarrow \xi' = \xi A$ в двойственном пространстве:

$$\xi' x = \xi A x = \xi x',$$

т. е. произведение $\xi'$ на $x$ равно произведению $\xi$ на образ $x'$ вектора $x$.

## 3. Ортогональные преобразования, эвклидова векторная геометрия

*Ортогональное преобразование* есть преобразование (2.4), оставляющее инвариантной квадратичную форму

$$x^*x = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \,(= x_1'^2 + \ldots + x_n'^2). \tag{3.1}$$

Это равносильно уравнению

$$A^*A = E \tag{3.2}$$

для $A$, откуда сразу следует

$$AA^* = E, \tag{3.3}$$

так как связь между матрицей $A$ и обратной матрицей $A^{-1}$ взаимна. Иначе это можно выразить, сказав, что ортогональная матрица тождественна с контрагредиентной к ней. Что же касается определителя ортогональной матрицы, то из (3.2) следует, что квадрат его равен 1, откуда

$$\det A = +1 \text{ или } -1.$$

Соответственно двум этим случаям говорят о *собственно* или *несобственно ортогональном преобразовании.*

Пусть $A_{ik}$ означает умноженный на $(-1)^{i-k}$ определитель матрицы, получающейся из $A$ по удалении $i$-той строки и $k$-го столбца. Хорошо известные тождества

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir}A_{kr} = \begin{cases} \det A & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}$$

показывают, что для неособенной матрицы $A$ отношение $\frac{A_{kl}}{\det A}$ есть элемент обратной матрицы $A^{-1}$ с индексами $ik$; поэтому контрагредиентной матрицей для $A$ служит

$$\hat{A} = \left\| \frac{A_{ik}}{\det A} \right\|.$$

Отсюда следует, что для собственно или несобственно ортогонального преобразования $A$ имеем соответственно

$$A_{ik} = \pm a_{ik}. \tag{3.4}$$

*Минор*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_\rho} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{i_\rho k_1} & \dots & a_{i_\rho k_\rho} \end{vmatrix}$$

будем обозначать символом

$$a_{i_1\dots i_\rho,\ k_1\dots k_\rho}.$$

В теории определителей доказывается следующее тождество, связывающее миноры матриц $\|a_{ik}\|$ и $\|A_{ik}\|$:

$$A_{i_1\dots i_\rho,\ k_1\dots k_\rho} = (\det A)^{\rho-1} a_{\iota_1\dots\iota_\sigma,\ \varkappa_1\dots\varkappa_\sigma}; \tag{3.5}$$

здесь $\rho + \sigma = n$ и

$$i_1\dots i_\rho \iota_1\dots\iota_\sigma,\quad k_1\dots k_\rho \varkappa_1\dots\varkappa_\sigma$$

— четные перестановки индексов $1, 2, \dots, n$. В частности,

$$\det(A_{ik}) = \{\det(a_{ik})\}^{n-1}.$$

Для ортогональной матрицы $A$, комбинируя (3.5) с (3.4), находим:

$$a_{i_1\dots i_\rho,\ k_1\dots k_\rho} = \pm a_{\iota_1\dots\iota_\sigma,\varkappa_1\dots\varkappa_\sigma}, \tag{3.6}$$

где верхний знак снова имеет место для собственно, а нижний — для несобственно ортогональных преобразований. Эти простые формальные соотношения понадобятся нам дальше.

Каждому известна роль, которую играют ортогональные преобразования в наиболее важной — *эвклидовой* — геометрии, где, после выбора единицы измерения длин, — фута или метра, — каждый вектор $\mathfrak{x}$ имеет определенную *длину*, квадрат которой задается положительно определенной квадратичной формой $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ от $\mathfrak{x}$. Соответствующая симметричная билинейная форма есть *скалярное произведение* $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$. Условие $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})=0$ означает, что $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ *перпендикулярны*. *Ортогональная* или *декартова* система координат $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ есть такая система координат, в которой $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ имеет нормальный вид

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x})=x_1^2+\ldots+x_n^2,$$

или, другими словами, — такая, что

$$(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k)=\delta_{ik}.$$

Все декартовы системы координат эквивалентны в эвклидовой геометрии; переход от одной декартовой системы координат к другой осуществляется с помощью ортогонального преобразования; соответственно тому, является ли это преобразование собственно или несобственно ортогональным, указанные системы имеют одинаковые или же противоположные „*ориентации*“. Линейное отображение $\mathfrak{x}\longrightarrow\mathfrak{x}'=A\mathfrak{x}$, оставляющее длины векторов неизменными, выражается в декартовой системе координат ортогональной матрицей $A$; в случае, когда матрица $A$ — собственно ортогональная, мы имеем дело с „вращением“.

В эвклидовой геометрии часто приходится строить декартову систему координат следующим индуктивным путем. Прежде всего выбирают (или имеют заданным) вектор $\mathfrak{a}\neq 0$. С помощью положительного нормирующего множителя

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})}}$$

превращают его в вектор $\mathfrak{e}_1=\alpha\mathfrak{a}$ единичной длины и берут $\mathfrak{e}_1$ в качестве первого базисного вектора. Затем выбирают произвольный вектор $\mathfrak{x}\neq 0$, перпендикулярный к $\mathfrak{e}_1$:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{e}_1)=0,$$

и берут „нормированный“ $\mathfrak{x}$ в качестве второго базисного вектора $\mathfrak{e}_2$. Следующий шаг требует решения системы двух однородных линейных уравнений

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{e}_1)=0, \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{e}_2)=0,$$

и т. д.; наконец, на последнем шаге нужно решить $n-1$ таких уравнений:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{e}_1)=0, \ldots, (\mathfrak{x}\mathfrak{e}_{n-1})=0.$$

Согласно общей теории линейных уравнений, выписанные уравнения всегда имеют решения $\mathfrak{x}\neq 0$, поскольку в течение всего процесса число их остается меньшим числа $n$ неизвестных компонент вектора $\mathfrak{x}=(x_1, \ldots, x_n)$. Это построение мы будем иногда называть *классическим индуктивным построением декартовой системы осей.*

В предшествующих наших замечаниях относительно эвклидовой или ортогональной векторной геометрии мы подразумевали под основным полем $k$ поле, обычно используемое при всех геометрических и физических измерениях: *поле* К *всех вещественных чисел.* Однако анализ последнего построения показывает, что оно требует лишь, чтобы поле $k$ удовлетворяло следующим двум условиям:

1) Сумма квадратов $\alpha^2+\beta^2+\ldots+\gamma^2$ может быть равна нулю лишь, если каждое слагаемое в отдельности равно нулю.

2) Уравнение Пифагора

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

имеет решение $\gamma$ для любых двух заданных чисел $\alpha$ и $\beta$.

Второе условие позволяет выразить всякую сумму квадратов в виде квадрата; действительно, в конечной сумме квадратов

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots$$

можно выполнить сложение последовательными шагами:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2=\alpha_{12}^2, \quad \alpha_{12}^2+\alpha_3^2=\alpha_{123}^2, \quad \ldots$$

Поле, удовлетворяющее первому условию, называется *вещественным полем*; если, кроме того, выполнено и второе условие, то мы будем называть поле *пифагоровым*. Роль этого условия в геометрии состоит в том, что оно позволяет откладывать заданный отрезок на заданной прямой [2].

## 4. Группы. Эрлангенская программа Клейна. Величины

Совокупность $GL(n)$ всех невырожденных линейных преобразований в $n$-мерном векторном пространстве P, совокупность $SL(n)$ всех унимодулярных линейных преобразований (т. е. преобразований с определителем, равным 1), совокупность $O(n)$ всех ортогональных преобразований и совокупность $O^+(n)$ всех собственно ортогональных преобразований — суть *группы*. И это понятие есть третий столп, на который будет опираться наше здание. В каждой точечной области, т. е. заданной совокупности элементов $p$, называемых точками, мы можем изучать *взаимно* *однозначные соответствия* $S\colon p \to p'$. $E$ означает тождество, $S^{-1}$ — обратное соответствие $p' \to p$, и два соответствия

$$S\colon p \to p', \qquad T\colon p' \to p''$$

вместе образуют *композицию*

$$TS\colon p \to p''.$$

*Группа* $\Gamma$ есть множество соответствий, содержащее тождество $E$, вместе с каждым $S$ из $\Gamma$ — также обратное соответствие $S^{-1}$, и вместе с любыми двумя $S$ и $T$ из $\Gamma$ — также их композицию $TS$. Рассматриваемое как *абстрактная группа* $\gamma$, наше множество $\Gamma$ состоит из элементов $s$ (безразлично какой природы), для которых определена композиция $st$, удовлетворяющая следующим трем правилам:

1) закон ассоциативности $(st)u = s(tu)$;

2) существует единичный элемент 1 такой, что $1s = s1 = s$ для всех $s$;

3) для каждого элемента $s$ существует обратный элемент $s^{-1}$, $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$.

Переходя на абстрактную точку зрения, мы всегда будем заменять прописные буквы $\Gamma$, $S, \ldots$ соответствующими строчными буквами $\gamma$, $s, \ldots$ Исходная группа преобразований $\Gamma$ является *точной реализацией* абстрактной групповой схемы $\gamma$. Говорят, что задана *реализация* абстрактной группы $\gamma$, если каждому элементу $s$ отнесено взаимно однозначное соответствие $S\colon s \to S$ так, что

$$1 \to E, \qquad s^{-1} \to S^{-1}, \qquad ts \to TS;$$

реализация является *точной*, если различным элементам $s$ отнесены различные $S$. *Каждая абстрактная группа $\gamma$ допускает точную реализацию, полем действия которой является само групповое многообразие* $\gamma$; эта реализация осуществляется путем отнесения каждому элементу $a$ „сдвига“ в $\gamma$:

$$(4.1) \qquad (a)\colon s' = as \qquad (\text{с обращением } s = a^{-1}s')$$

(*регулярная реализация*). Реализация посредством линейных подстановок в $n$-мерном векторном пространстве называется *представлением $n$-ой степени*.

Здесь не место повторять вереницу элементарных определений и предложений о группах, заполняющую первые страницы любого руководства по теории групп[3]. Следуя Эрлангенской программе Клейна[4] (1872), мы предпочтем описать в общих чертах значение групп для идеи *относительности*, в частности в геометрии. Возьмем в качестве примера эвклидово точечное пространство. По отношению к декартовой системе отнесения каждая точка $p$ представляется своей координатой $x = (x_1, x_2, x_3)$ —столбцом из трех вещественных чисел. (Я намеренно отклоняюсь от обычного словоупотребления, называя весь символ $(x_1, x_2, x_3)$ координатой, в единственном числе.) Координаты суть объективно индивидуализированные воспроизводимые символы, тогда как точки все одинаковы. Не существует никакого объективного отличительного свойства, с помощью которого можно было бы выделить одну точку среди всех остальных; фиксирование точки возможно только путем указательного акта, выражаемого такими словами, как „это“, „здесь“. Все декартовы системы отнесения одинаково допустимы; никакое объективное геометрическое свойство, которым обладает одна из них, не может не быть присущим и всем остальным. Координаты $x$, $x'$ одной и той же произвольной точки $p$ относительно двух таких систем связаны преобразованием $S$:

$$x'_i = a_i + \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{4.2}$$

где $A = \| a_{ik} \|$ — неособенная матрица, удовлетворяющая соотношению

$$A^* A = aE \tag{4.3}$$

с числовым множителем $a$ (наличие которого обусловливается произвольностью масштабной единицы.) *Каждое* такое преобразование (4.2) осуществляет переход от заданной декартовой системы отнесения к некоторой другой. В то же время $S$ может быть истолковано и как выражение, задающее в фиксированной декартовой системе отнесения отображение подобия $p \to p' = \sigma p$ рассматриваемого точечного пространства на самое себя. Группа всех этих преобразований или автоморфизмов пространства описывает истинный характер относительности, свойственной данному пространству, истинную его степень однородности. Например, групповая характеристика эвклидовой геометрии говорит нам, что все точки одинаковы, что в заданной точке — все направления одинаковы, и т. д.

В аффинном точечном пространстве ограничение (4.3) заменяется более слабым: $\det A \neq 0$; если же приписывать термину „аффинное“ первоначальный смысл, вкладывавшийся в этот термин Эйлером и предполагавший сохранение объема, то (4.3) заменится условием $\det A = 1$. Имея перед собой эти и другие примеры, особенно проективную геометрию, Клейн выдвинул принцип, состоящий в том, что каждая группа преобразований может служить группой автоморфизмов и что она определяет природу геометрии, с которой мы имеем дело. Будем различать две тесно связанные идеи 1° автоморфизма и 2° координатизации (*sit venia verbo*! [да простят это слово!]).

1° Автоморфизмы. Лейбниц выдвинул принцип: две фигуры подобны или эквивалентны, если их нельзя отличить друг от друга, рассматривая каждую саму по себе, так как любое возможное объективное свойство, которое имеет одна фигура, имеет и другая[5]. Лейбниц выявил, таким образом, действительный общий смысл подобия. Для геометрии, основанной на системе аксиом, объективные свойства и соотношения можно описать как логически определяемые через неопределимые далее фундаментальные геометрические понятия, входящие в аксиомы. Отображение подобия или автоморфизм есть взаимно однозначное соответствие $\sigma$: $p \longrightarrow p' = \sigma p$ между точками $p$ пространства, переводящее каждую фигуру в подобную, т. е. не нарушающее никакого объективного соотношения между точками. (Отображение $p \longrightarrow p'$ не нарушает соотношения $R(p, q, \ldots)$, если образы $p', q', \ldots$ удовлетворяют этому соотношению, коль скоро ему удовлетворяют первоначальные точки $p, q, \ldots$) Автоморфизмы необходимо образуют *группу*, потому что каждая фигура эквивалентна самой себе и эквивалентность есть симметричное и транзитивное соотношение. Групповые аксиомы представляют собой как раз формальное выражение этих тривиальных фактов. Математик, не расположенный к привлечению каких бы то ни было внешних истин, будет склонен стать на ту точку зрения, что любая группа может быть задана как группа автоморфизмов; он заявляет этим, что собирается изучать только те соотношения между точками, которые не нарушаются при отображениях из его группы.

2° Координатизация. В системе отнесения $\mathfrak{f}$ точечное пространство отображается на поле воспроизводимых символов или координат:

$$p \longrightarrow x \quad \text{или} \quad x = x(p).$$

(Слово „поле“ употреблено здесь в широком смысле области изменения.) Мы предполагаем, что координатизация устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $p$ и координатами $x$. Ничто не препятствует рассматривать как систему отнесения саму эту координатизацию. Посредством автоморфизма

$$\sigma\colon\ p \longrightarrow p' = \sigma p$$

мы можем определить новую координатизацию

$$x'(p) = x(p') = x(\sigma p),$$

эквивалентную первой и никаким объективным способом не отличимую от нее. Обе координатизации связаны преобразованием $S$,

$$x' = S(x) \qquad \{x = x(p), \quad x' = x(p')\},$$

описывающим автоморфизм $\sigma$ в системе координат $x$. Преобразования $S$, выражающие различные автоморфизмы $\sigma$ в заданной системе отнесения $\mathfrak{f}$, образуют группу, изоморфную группе автоморфизмов. В то же время группа преобразований $S$ описывает переходы эквивалентных систем отнесения друг в друга. Самое большее, на что мы можем надеяться, — это объективно определить *класс одинаково допустимых систем отнесения*, так чтобы любые две системы из этого класса были эквивалентны. Это есть *проблема относительности: фиксировать объективно класс эквивалентных координатизаций и установить группу преобразований $S$, связывающих их друг с другом.* (Индивидуальная функция преобразования $S$, совершенно так же, как и сама координата $x$, является воспроизводимым символом.)

Однако воспроизводимыми символами требуется представлять не только точки, но и любые другие типы геометрических объектов; а при переходе к физике в аналогичной символической трактовке нуждаются и всякого сорта физические величины, как скорости, силы, напряжения поля, волновые функции и т. д.

Часто действуют так, как если бы, раз только точки уже подчинены этой трактовке путем фиксации для них системы отнесения, дело с этими остальными объектами устроено само собой, не требуя особой заботы. Разумеется, это не совсем верно; требуется, по крайней мере, произвольно фиксировать дополнительные единицы измерения для того, чтобы сделать схему отнесения полной. Не стесняя себя заранее излишне жесткими рамками, мы можем в этом случае говорить о системе отнесения, охватывающей все виды объектов, с тем, однако, чтобы закон преобразования для символов, описывающих в соответствующих системах отнесения объекты заданного сорта (точки, или напряжения электромагнитного поля), зависел от рассматриваемого специального объекта. Группа автоморфизмов будет тогда скорее абстрактной группой, а не группой преобразований. Это представляется естественным шагом вперед по сравнению с собственной клейновской формулировкой его программы. Абстрактная группа характеризует „*геометрию*“, в смысле Клейна, тогда как *тип* переменной величины в этой геометрии характеризуется законом ее преобразования. Каждый элемент $s$ абстрактной группы описывает переход от одной системы отнесения к другой. Закон преобразования устанавливает, как изменяется символ или координата, представляющие произвольное значение рассматриваемой величины в системе отнесения $\mathfrak{f}$, при переходе к другой системе $\mathfrak{f}'$ посредством элемента $s$; следовательно, этот закон является реализацией абстрактной группы посредством преобразований в поле координат. Я дам теперь систематическую аксиоматическую формулировку, в которой (1) относится к „геометрии“ или „пространству“ как таковым, а (2) — к специальным величинам в них.

А. „Символическая“ часть (относящаяся к элементам группы и координатам).

1°. Задана совокупность $\gamma$ элементов, называемых *групповыми элементами*. Каждая пара групповых элементов $s$, $t$ порождает композицию — элемент $ts$. Существуют единичный элемент 1, удовлетворяющий соотношению $1s = s1 = s$, и обратный элемент $s^{-1}$ для каждого группового элемента $s$: $s^{-1}s = ss^{-1} = 1$. (Выполнение закона ассоциативности явно не требуется.)

2°. Заданы совокупность (или „поле“) элементов, называемых координатами $x$, и реализация $\mathfrak{A}$: $s \longrightarrow S$ группы $\gamma$ посредством взаимно однозначных соответствий $x \longrightarrow x' = Sx$ в этом поле.

В. „Геометрическая“ часть (относящаяся к системам отнесения и величинам).

1°. Каждые две *системы отнесения* $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ определяют групповой элемент $s$, называемый *переходом* от $\mathfrak{f}$ к $\mathfrak{f}'$. Обратно, групповой элемент $s$ „переводит“ систему $\mathfrak{f}$ в однозначно определенную систему $\mathfrak{f}' = s\mathfrak{f}$, так, что переход $(\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}') = s$. Переход $\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}$ есть единичный элемент 1, переход $\mathfrak{f}' \longrightarrow \mathfrak{f}$ — обратный элемент по отношению к переходу $\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}'$. Если $s$, $t$, соответственно, — переходы $\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}' \longrightarrow \mathfrak{f}''$, то композиция $ts$ есть переход $\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}''$.

2°. Величина $q$ типа $\mathfrak{A}$ допускает различные значения. По отношению к произвольно фиксированной системе отнесения $\mathfrak{f}$ каждое значение величины $q$ определяет координату $x$, так, что $q \longrightarrow x$ есть взаимно однозначное отображение возможных значений величины $q$ на поле координат. Координата $x'$, соответствующая тому же произвольному значению $q$ в любой другой системе $\mathfrak{f}'$, связана с $x$ преобразованием $x' = Sx$, сопоставляемым с переходом $(\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}') = s$ заданной реализацией $\mathfrak{A}$.

Для лучшего уяснения добавим еще следующие замечания. Связь между системами отнесения и групповыми элементами, установленная в В 1°, весьма сходна с связью между точками и векторами в аффинной геометрии [6]. Последняя аксиома в В 1° влечет за собой закон ассоциативности для композиции групповых элементов. Эпистемолог отметит тот факт, что объекты в (А) — групповые элементы и координаты — суть объективно индивидуализированные и воспроизводимые символы, тогда как любые две системы отнесения, говоря словами Лейбница, „неразличимы, если каждую рассматривать саму по себе“. Они вводятся для того, чтобы сделать возможной фиксацию значений всевозможных типов величин в нашей геометрии посредством воспроизводимых символов. С математической точки зрения следовало бы заметить, что аксиомы В 1° содержат ничуть не больше, чем аксиомы, определяющие группу, так что элементы любой ассоциативной группы можно рассматривать как переходы между различными системами отнесения в надлежащей „геометрии“. Действительно, если группа $\gamma$ задана, можно каждый ее элемент $s$ назвать одновременно „системой отнесения“ и определить переход от системы $s$ к системе $t$ как групповой элемент $ts^{-1}$. Тогда наши аксиомы, связывающие групповые элементы с системами отнесения, будут, очевидно, выполнены, если групповое умножение ассоциативно. Таким же образом математик не поколеблется отождествить значения величины $q$ с ее соответствующими координатами $x$, и требование, чтобы объективное значение имели лишь те соотношения, которые остаются неизменными при замене $x$ на

$$x' = Sx \qquad (s \longrightarrow S \in \mathfrak{A})$$

для каждого $s$, будет означать для него лишь условие, которым он провозглашает, что не будет изучать никаких других соотношений.

Все это звучит достаточно обще и абстрактно. Тем не менее наша формулировка В 2° еще слишком узка для многих важных целей, так как следует учитывать возможность, что одна координатная система будет не в состоянии охватить всей области значений величины $q$. Однако мы не собираемся вдаваться в эти дальнейшие обобщения; напротив, начиная отсюда, мы ограничимся тем частным случаем, когда реализация $\mathfrak{A}$ есть представление и потому координатой является любой ряд $n$ чисел $(x_1, \ldots, x_n)$

из заданного числового поля $k$ ($k$-вектор). Слово „величина" будет теперь резервировано только для этого случая, и мы еще раз повторим определение при этом ограничении [7]:

*Величина $q$ типа $\mathfrak{A}$ характеризуется представлением $\mathfrak{A}$ группы $\gamma$ над $k$: $s \longrightarrow A(s)$ некоторой степени $n$. Каждое значение величины $q$ определяет в системе отнесения $\mathfrak{f}$ $k$-вектор $(x_1, \ldots, x_n)$, так что „компоненты" $x_i$ величины $q$ преобразуются при переходе $s$ к другой системе $\mathfrak{f}'$ с помощью матрицы $A(s)$.*

Представления степени 1 суть представления с помощью *чисел*:

$$s \longrightarrow \lambda(s); \qquad \lambda(1) = 1, \qquad \lambda(st) = \lambda(s)\lambda(t).$$

Частный случай представления степени 1, для которого $\lambda(s) = 1$ тождественно относительно $s$: $s \longrightarrow 1$, называется *тождественным представлением*; величина этого типа называется *скаляром.*

Мы теперь уже уверенно вошли в воды чистой математики. Понятия *неэквивалентности, приводимости* и *разложения* представляются совершенно естественными в применении к представлению $\mathfrak{A}$ группы $\gamma$ или к типу $\mathfrak{A}$ величин. Они имеют даже более общий смысл, поскольку группу $\mathfrak{A}$ можно здесь заменить любой совокупностью матриц.

Пусть $\mathfrak{A}$ — какая-нибудь совокупность линейных преобразований или матриц $A$ в $n$-мерном векторном пространстве $\mathrm{P}$. Если изменить базис этого пространства с помощью невырожденной линейной подстановки $U$, то каждая матрица $A$ перейдет в

$$A' = U^{-1}AU;$$

матрицы $A'$ образуют *эквивалентную* совокупность $\mathfrak{A}' (\sim \mathfrak{A})$.

Совокупность $\mathfrak{A}$ называется *приводимой*, если $\mathrm{P}$ содержит линейное подпространство $\mathrm{P}'$, инвариантное относительно всех преобразований $A$ из $\mathfrak{A}$ и не совпадающее ни со всем пространством $\mathrm{P}$, ни с нулевым пространством, состоящим из одного лишь вектора $0 = (0, \ldots, 0)$. В этом случае $\mathrm{P}$ можно отнести к такой системе координат, что все матрицы $A$ будут иметь вид (2.6).

$\mathfrak{A}$ *разложимо,* если $\mathrm{P}$ распадается на два ненулевых подпространства $\mathrm{P}_1 \dotplus \mathrm{P}_2$, инвариантных относительно всех $A$ из $\mathfrak{A}$. В системе координат, приуроченной к этому разложению $\mathrm{P}_1 \dotplus \mathrm{P}_2$, каждая матрица $A$ имеет вид (2.7), что мы будем выражать символической записью

$$A = A_1 \dotplus A_2.$$

Эти определения применимы, в частности, к группе $\mathfrak{A}$: $s \longrightarrow A(s)$ матриц $A(s)$, гомоморфной заданной группе $\gamma$. Если $U$ — фиксированная неособенная матрица, представление

$$s \longrightarrow A'(s), \qquad A'(s) = U^{-1} A(s) U$$

*эквивалентно* первоначальному. Эквивалентные представления мы будем рассматривать как одно и то же представление, отнесенное только к различным базисам в пространстве представления, по отношению к которым линейные операторы представления выражены в матричной форме. След $\chi(s)$ матрицы $A(s)$ называется *характером представления. Эквивалентные представления имеют один и тот же характер*. В случае *приводимости* все $A(s)$ имеют, в надлежащей системе координат, вид (2.6). Часть $A_1(s)$ определяет представление $m$-ой степени $\mathfrak{A}_1$ группы $\gamma$, так что часть $(x_1, \ldots, x_m)$ величины $(x_1, \ldots, x_n)$ сама является величиной типа $\mathfrak{A}_1$; мы говорим, что она *содержится* в последней. Если $\mathfrak{A}$ *неприводимо*, то сама величина называется *неприводимой* или *примитивной*. В случае *разложения* (2.7) наша величина является соединением двух независимых частей

$$(x_1, \ldots, x_{n_1}), \qquad (x_{n_1+1}, \ldots, x_n),$$

компоненты каждой из которых преобразуются только между собой. Ничто не препятствует рассматривать электромагнитный потенциал вместе с напряжением поля как одну величину с десятью компонентами; но, разумеется, это — довольно искусственное объединение и гораздо естественнее разложить его на две независимые части, соответственно, с четырьмя и шестью компонентами — потенциал и напряжение поля. Очевидно является вопросом первостепенной важности, разбивается ли заданная величина на несколько независимых примитивных величин, т. е. можно ли заданное представление $\mathfrak{A}$ расщепить на неприводимые составляющие. Другими словами: верно ли, что подпространство $\mathrm{P}_1$ пространства $\mathrm{P}$, инвариантное относительно операторов $A(s)$ из $\mathfrak{A}$, обладает инвариантным дополнительным подпространством $\mathrm{P}_2$, так что все пространство представления $\mathrm{P}$ разбивается на две линейно независимые части $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2$, — и верно ли это для *всякого* представления $\mathfrak{A}$ заданной группы $\gamma$? Ответ оказывается утвердительным в наиболее важных случаях и, в частности, как мы позже увидим, для всех конечных групп.

На нашем пути мы встретились со следующей операцией *сложения*, посредством которого два представления

$$\mathfrak{A}: s \longrightarrow A(s) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}': s \longrightarrow A'(s)$$

одной и той же группы, имеющие, соответственно, степени $m$ и $n$, порождают представление $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{A}'$ степени $m+n$:

$$s \longrightarrow A(s) \dotplus A'(s).$$

Соединение величины $(x_1, \ldots, x_m)$ типа $\mathfrak{A}$ с величиной $(y_1, \ldots, y_n)$ типа $\mathfrak{A}'$ дает величину

$$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n).$$

Характер представления $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{A}'$ является суммой характеров представлений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$.

Другой важной операцией является *умножение* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$. Если векторы

$$x = (x_1, \ldots, x_m), \qquad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

подвергаются соответственно линейным преобразованиям

$$A = \| a_{ik} \|, \qquad A' = \| a'_{pq} \| \qquad \begin{pmatrix} i, & k = 1, \ldots, m; \\ p, & q = 1, \ldots, n \end{pmatrix},$$

то $mn$ произведений

$$x_i y_p \quad (i = 1, \ldots, m;\ p = 1, \ldots, n) \tag{4.4}$$

подвергаются соответствующему линейному преобразованию $A \times A'$, называемому *кронекеровским произведением* преобразований $A$ и $A'$. В явной форме преобразование

$$C = A \times A' = \| c_{ip, kq} \|$$

очевидно задается равенством

$$c_{ip, kq} = a_{ik} a'_{pq},$$

и наше определение сразу приводит к закону композиции

$$(A \times A')(B \times B') = (AB \times A'B').$$

$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ есть представление

$$s \longrightarrow (A(s) \times A'(s))$$

степени $mn$. Тот же знак $\times$ будет применяться и к соответствующим величинам. Характер представления $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ есть произведение характеров представлений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$. Совершенно естественно возникает задача разложения произведения двух примитивных величин на его примитивные составляющие; частные случаи этой задачи будут рассмотрены ниже (главы IV и VII).

Числа (4.4) можно рассматривать как компоненты $z_{ip}$ вектора $z = x \times y$ в $mn$-мерном векторном пространстве $PP'$. При рассмотрении линейных форм в этом пространстве часто оказывается удобным заменять самый общий вектор $z$ с $mn$ независимыми компонентами вектором $x \times y$, где $x_i$ и $y_p$ — независимые переменные; этот прием называется *символическим методом* в теории инвариантов.

Отметим уже здесь некоторые важные представления полной линейной группы $GL(n)$; мы придем к ним, рассматривая в аспекте теории представлений преобразование форм от $n$ переменных под действием линейных подстановок переменных. Возьмем любое невырожденное линейное преобразование $A$:

$$(4.5) \qquad x' = \sum_k a_{ik} x_k.$$

Под его влиянием все одночлены заданной степени $r$,

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n} \qquad (r_1 + r_2 + \dots + r_n = r),$$

подвергнутся линейному преобразованию $(A)_r$, и соответствие $A \longrightarrow (A)_r$ будет представлением степени

$$\frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \dots r}.$$

С другой стороны, рассмотрим произвольную форму $f$ степени $r$, зависящую от контравариантного векторного аргумента $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, и запишем ее в виде

$$(4.6) \qquad f = \sum \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} u_{r_1 \dots r_n} \xi_1^{r_1} \dots \xi_n^{r_n}.$$

Когда $\xi_i$ преобразуются по формуле

$$(4.7) \qquad \xi_i = \sum_k a_{ki} \xi'_k,$$

$f$ переходит в форму от новых переменных $\xi'_i$, коэффициенты которой $u'_{r_1 \dots r_n}$ получаются из $u_{r_1 \dots r_n}$ с помощью той же подстановки $(A)_r$, с которой мы встретились выше. Действительно, $r$-тая степень инвариантного произведения

$$(\xi x) = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$$

является частным случаем формы (4.6), с

$$u_{r_1 \dots r_n} = x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}.$$

Символический метод заменяет произвольную форму $f$ частной формой $(\xi x)^r$.

Произведения компонент $r$ векторов $x, y, \ldots, z$:

$$x_{i_1} y_{i_2} \ldots z_{i_r},$$

когредиентно преобразующихся посредством того же самого $A$, (4.5), в векторы $x', y', \ldots, z'$, подвергаются преобразованию $A \times A \times \ldots \times A$. Величина $F$ этого типа с $n^r$ компонентами $F(i_1 i_2 \ldots i_r)$ называется *тензором* ранга $r$. Согласно (1.10), мы записываем нашу форму (4.6) в виде

$$\sum v(i_1 i_2 \ldots i_r) \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_r}$$

с симметрическими коэффициентами $v(i_1 i_2 \ldots i_r)$, где

$$u_{r_1 r_2 \ldots r_n} = v(i_1 i_2 \ldots i_r),$$

если $r_1$ из $r$ индексов $i_\alpha$ равны 1, $r_2$ из этих индексов равны 2, и т. д. Поэтому многообразие форм $r$-той степени есть не что иное, как совокупность всех *симметрических* тензоров $F$ ранга $r$ — где симметрия означает, что $F(i_1 i_2 \ldots i_r)$ не меняет своего значения при любых перестановках индексов или аргументов $i_1 i_2 \ldots i_r$. В пространстве тензоров ранга $r$ симметрические тензоры образуют линейное подпространство, инвариантное относительно всех (невырожденных) преобразований $A$. Другое такое инвариантное подпространство состоит из всех косо-симметрических тензоров, т. е. тензоров, компоненты которых меняют знак при транспозиции двух аргументов, например $i_1$ и $i_2$:

$$F(i_2 i_1 i_3 \ldots i_r) = -F(i_1 i_2 i_3 \ldots i_r).$$

Частным случаем упомянутой выше задачи разложения произведения нескольких примитивных величин на его примитивные компоненты является расщепление тензорного пространства на неприводимые инвариантные подпространства; действительно, величина, называемая произвольным тензором, есть кронекеровское произведение $r$ (ковариантных) векторов. Этот вопрос будет рассмотрен в главе IV для полной линейной группы и в главах V и VI для некоторых других групп.

Прежде чем закончить этот параграф, коснемся вопроса об *относительности в эвклидовом пространстве*, хотя лишь слабо связанного с рассматриваемой здесь темой, однако интересного тем, что он породил много путаницы у математиков и философов; я имею в виду вопрос о связи *конгруэнтности* с группой автоморфизмов эвклидова пространства. Если основывать геометрию на некотором числе фундаментальных отношений, как

„лежит на“, „между“, „конгруэнтно“, то автоморфизм есть соответствие, не нарушающее никакого из этих отношений. Оставляя сначала в стороне отношение конгруэнтности, находим, что автоморфизм, поскольку это относится к векторам, должен быть *линейным* векторным преобразованием $S$. В предположении, что конгруэнтность устанавливается посредством собственно ортогональных преобразований $A$, дополнительное условие на $S$, а именно — не нарушать конгруэнтности, сводится к требованию, чтобы $S$ было *перестановочно* со всей группой $O^+$ конгруэнтностей:

$$S^{-1}AS = A'$$

должно быть собственно ортогональной матрицей вместе с $A$. Совокупность всех линейных преобразований $S$, удовлетворяющих этому условию, является группой, так называемым *нормализатором* группы $O^+$. Нормализатор группы включает эту группу; в нашем случае он в действительности шире ее, так как включает, кроме „вращений“, также „отражения“ (несобственно ортогональные преобразования) и растяжения. Группа $O^+$ играет свою внутреннюю роль в эвклидовой геометрии задолго до возникновения „внешнего“ вопроса о всех автоморфизмах; группой ее автоморфизмов является нормализатор группы $O^+$, а не сама $O^+$. Что же сказать теперь по поводу кантовской трактовки различия „левого“ и правого“ в § 13 его „Пролегомен“ [8], где он утверждает, что „различие между подобными и равными, но не конгруэнтными вещами (как, например, противоположно завитыми винтами) мы можем уяснить не с помощью отдельного понятия, но лишь в связи с правой и левой рукой, тем самым прямо опираясь на интуицию (Anschauung)“? Не подлежит сомнению, что понятие конгруэнтности в пространстве основано на интуиции, однако, то же относится и к подобию. Кант затронул на вид довольно тонкий пункт; но этот пункт отлично подходит под общую „концепцию“ группы и ее нормализатора. Группа, вообще говоря, не может быть получена из ее нормализатора; нет ничего удивительного в том, что нормализатор может быть действительно шире самой группы.

## 5. Инварианты и коварианты

Пусть задана группа $\Gamma$ линейных преобразований $A$ в $n$-мерном векторном пространстве $P$. Функция $f(x, y, \ldots)$, зависящая от нескольких векторных аргументов

$$(5,1) \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots$$

из P, переходит в функцию $f' = Af$, когда $x, y, \dots$ переводятся линейным преобразованием $A$ в $x' = Ax$, $y' = Ay, \dots$:

$$f'(x', y', \dots) = f(x, y, \dots).$$

Как и должно быть, мы имеем тогда $B(Af) = (BA)f$. Если $Af = f$ для всех подстановок $A$ из нашей группы $\Gamma$, то функция $f$ называется *инвариантом* группы $\Gamma$. В этом смысле скалярные произведения $(xx)$, $(xy), \dots$ суть ортогональные векторные инварианты. Мы будем заниматься исключительно *алгебраическим случаем*, когда $f$ есть полином, однородный относительно компонент каждого векторного аргумента, и поэтому называется *инвариантной формой*. Степени $\mu, \nu, \dots$ формы $f$ относительно $x, y, \dots$ могут как совпадать, так и не совпадать.

С этим элементарным понятием мы сопоставим в порядке контраста *общее понятие инварианта*. Тогда как первое связано с заданной *группой* $\Gamma$ *линейных преобразований* $A$, последнее определяется по отношению к заданной *абстрактной* группе $\gamma = \{s\}$ и нескольким ее представлениям, имеющим соответственно степени $m, n, \dots$:

$$(5.2) \qquad \mathfrak{A}\colon\ s \longrightarrow A(s), \qquad \mathfrak{B}\colon\ s \longrightarrow B(s), \qquad \dots$$

Функция $\varphi(x, y, \dots)$, зависящая от произвольной величины $x$ типа $\mathfrak{A}$, далее, величины $y$ типа $\mathfrak{B}, \dots$, будет определенной функцией $f$ от численных векторов

$$(5.3) \qquad x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad \dots$$

в заданной системе отнесения и определенной функцией $f'$ в другой системе отнесения, в которой те же величины, служащие аргументами, имеют компоненты $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$, $y' = (y'_1, \dots, y'_n), \dots$:

$$\varphi = f(x, y, \dots) = f'(x', y', \dots).$$

Преобразованную функцию $f'$ мы будем обозначать через $sf$, где $s$ — переход от первой системы отнесения ко второй:

$$x' = A(s)\,x, \quad y' = B(s)\,x, \quad \dots$$

Наша функция $\varphi$ есть *инвариант*, если ее алгебраическое выражение $f$ не зависит от системы отнесения: $sf = f$ для всех элементов $s$ группы $\gamma$. Тот, кто из соображений математического пуризма желает исключить из определения „системы отнесения“ и „величины“, предпочитая им групповые элементы и численные векторы, назовет функцию $f(x, y, \ldots)$ численных векторов $x$, $y, \ldots$ инвариантом относительно заданных представлений $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}, \ldots$ группы $\gamma$, если

$$f(A(s)x, B(s)y, \ldots) = f(x, y, \ldots).$$

Ясно, что элементарный случай „векторных инвариантов“ подпадает под эту общую схему.

В классической теории инвариантов $\gamma$ есть специальная (или унимодулярная) линейная группа $SL(n)$, а величины $x, y, \ldots$, служащие аргументами, суть произвольные формы от $n$ переменных. Мы разъяснили перед концом предыдущего параграфа, как такие формы интерпретировать как особого типа величины. Обычная точка зрения классической теории несколько разнится от этой, в том отношении, что она придает значение не самим переменным и коэффициентам форм, но *лишь их отношениям*, поскольку значения $n$ переменных рассматриваются как однородные координаты точки в *проективном* $(n-1)$*-мерном пространстве*, а не как компоненты вектора в аффинном $n$-мерном пространстве. Обращение заданной формы в нуль определяет алгебраическое многообразие $n-2$ измерений; обращение в нуль инварианта $J$, зависящего от нескольких таких произвольных форм, определяет проективно инвариантное алгебраическое соотношение между соответствующими многообразиями.

Особого упоминания заслуживает одно специальное обобщение элементарной концепции, а именно, тот случай, когда аргументами служат некоторое число *ковариантных векторов* $x$, $y, \ldots$ и некоторое число *контравариантных векторов* $\xi$, $\eta, \ldots$ В то время как $x$, $y, \ldots$ преобразуются когредиентно с любой подстановкой $A$ из группы $\Gamma$, каждый из векторов $\xi$, $\eta, \ldots$ подвергается контрагредиентному преобразованию $\check{A}$. Произведение $(\xi x)$ является наиболее важным инвариантом этого типа, как для полной линейной группы $GL(n)$, так и для любой ее подгруппы $\Gamma$. Изучение таких функций $f(x, y, \ldots, \xi, \eta, \ldots)$ включено нами в главу о векторных инвариантах по той причине, что здесь, как и в самом элементарном случае, мы имеем дело с *одной* заданной группой $\Gamma$ *линейных подстановок*, а не с *абстрактной* группой $\gamma$ и рядом ее представлений. (Если $x$, $y, \ldots$ — координаты точек в проективном $(n-1)$-мерном пространстве, то $\xi$, $\eta, \ldots$ — координаты плоскостей, и обратно.)

Возвращаясь к общему случаю, остановимся особо на формах $f(x, y, \ldots)$, имеющих *предписанные степени* $\mu$, $\nu, \ldots$

относительно величин $x, y, \dots$, служащих аргументами. Эти формы суть линейные комбинации

$$(5.4)\quad N=\frac{m(m+1)\dots(m+\mu-1)}{1\cdot2\dots\mu}\cdot\frac{n(n+1)\dots(n+\nu-1)}{1\cdot2\dots\nu}\dots$$

одночленов предписанных степеней,

$$z(\alpha_1\dots\alpha_m\beta_1\dots\beta_n\dots)=x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}y_1^{\beta_1}\dots y_n^{\beta_n}\dots$$
$$(\alpha_1+\dots+\alpha_m=\mu,\ \beta_1+\dots+\beta_n=\nu,\ \dots).$$

Показатели степеней $\alpha, \beta, \dots$ суть, конечно, неотрицательные целые числа. Когда компоненты $x_i$ подвергаются линейному преобразованию $A(s)$, компоненты $y_k$ — преобразованию $B(s), \dots$, наши одночлены подвергаются некоторому составному преобразованию $U(s)$, определяющему составное представление $\mathfrak{U}$: $s\longrightarrow U(s)$ степени $N$. Тем самым инвариантные формы $f(x, y, \dots)$ превращаются в *линейные инварианты одной величины* $z$ типа $\mathfrak{U}$. Однако следует подчеркнуть то обстоятельство, что эта линеаризация проблемы инвариантов возможна лишь, если мы изучаем инвариантные формы с предписанными степенями $\mu, \nu, \dots$

*Линейные инварианты* $L(x)$ величины $x=(x_1, \dots, x_n)$ заданного типа $\mathfrak{A}$: $s\longrightarrow A(s)$ образуют подпространство $n$-мерного пространства всех линейных форм от $x$. Если $l$ — размерность этого подпространства, то мы имеем точно $l$ линейно независимых линейных инвариантов. Беря их в качестве первых $l$ координат произвольного $x$ в новой системе координат, мы достигаем приведения представления $\mathfrak{A}$ к виду

$$A(s)=\begin{Vmatrix} E_l & 0 \\ * & * \end{Vmatrix}.$$

$l$ — есть максимальная степень, с которой единичное представление $s\longrightarrow E_l$ содержится в $\mathfrak{A}$. Если, в частности, имеет место теорема о полной приводимости, то мы можем описать $l$ как максимальную кратность, с которой тождественное представление $s\longrightarrow 1$ входит в $\mathfrak{A}$.

Инвариант можно описать как *скаляр, зависящий от нескольких произвольных величин* $x, y, \dots$ *предписанных типов*. Если результат преобразования $sf$ отличается от $f$ постоянным множителем $\lambda(s)$,

$$(5.5)\qquad sf=\lambda(s)\cdot f,$$

то $f$ называется *относительным инвариантом с мультипликатором* $\lambda(s)$. $f=0$ остается при этом инвариантным соотношением между переменными величинами $x$, $y$, ... В отличие от относительных инвариантов, инварианты в первоначальном смысле называют *абсолютными инвариантами.* Мультипликатор есть представление $s \to \lambda(s)$ степени 1. Еще более обще, *ковариант типа* $\mathfrak{H}$: $s \longrightarrow H(s)$ есть величина $f$ этого типа, зависящая от аргументов $x$, $y$, ..., являющихся соответственно величинами заданных типов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... По отношению к заданной системе отнесения, $f$ будет иметь $h$ компонент

$$f_1=f_1(x, y, \ldots), \ \ldots, \quad f_h=f_h(x, y, \ldots),$$

совершенно так же как $x$, $y$, ... имеют компоненты (5.3). После осуществления перехода $s$ к другой системе отнесения новыми компонентами, получающимися из старых посредством линейного преобразования $H(s)$, будут $f'_1=sf_1$, ..., $f'_h=sf_h$; поэтому, если положить

$$f'_i(x', y', \ldots)=f_i(x, y, \ldots) \qquad (i=1, \ldots, h)$$

с

$$x'=A(s)x, \quad y'=B(s)y, \ldots,$$

должно выполняться равенство

$$f'=sf=H(s)f.$$

Система уравнений

$$f_1=0, \ \ldots, \ f_h=0$$

имеет тогда инвариантный смысл, не зависящий от системы отнесения.

В качестве иллюстрации к относительным инвариантам рассмотрим *классический случай*, когда $\gamma$ есть полная линейная группа $GL(n)$, состоящая из линейных преобразований

$$A\colon\ x'_i=\sum_k a_{ik}x_k,$$

а величинами, входящими в качестве аргументов в $f$, являются произвольные формы заданной степени от $n$ переменных $\xi_i$. При этих условиях $\lambda(A)$ будет однородным полиномом от $n^2$ переменных $a_{ik}$; поэтому для частного преобразования

(5.6) $$x'_i=ax_i$$

мультипликатор $\lambda(A)$ будет равен $a^G$ с неотрицательным целым показателем $G$. Применяя соотношение

$$\lambda(A)\lambda(B) = \lambda(AB)$$

к преобразованию $A$ и преобразованию $B = \|A_{ki}\|$, элементами которого служат миноры $A_{ki}$ матрицы $A$:

$$AB = BA = \Delta \cdot E,$$

где $\Delta = |A|$ есть определитель преобразования $A$, получим

$$\lambda(A)\lambda(B) = \Delta^G. \tag{5.7}$$

Но так как $\Delta$ есть *неприводимый* полином от $n^2$ переменных $a_{i\varkappa}$, а $\lambda(B)$ — полином, как и $\lambda(A)$, то из (5.7) с необходимостью следует, что $\lambda(A)$ есть степень определителя $\Delta$:

$$\lambda(A) = \Delta^g. \tag{5.8}$$

Целый показатель $g$ называется *весом* относительного инварианта. Вследствие формулы (5.8), относительные инварианты полной линейной группы $GL(n)$ являются абсолютными инвариантами унимодулярной группы $SL(n)$.

Основываясь на этих общих понятиях относительно полей, векторов, групп, представлений, мы приступим теперь к изучению алгебраических векторных инвариантов наиболее важных групп, особенно полной и унимодулярной линейных групп, $GL(n)$ и $SL(n)$, и ортогональной группы, $O(n)$ или $O^+(n)$, для $n$ измерений.

## *ГЛАВА II*

# ВЕКТОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

## 1. Взгляд в прошлое

*Теория инвариантов* возникла в Англии около середины XIX в. как естественный аналитический инструмент для описания конфигураций и их внутренних геометрических связей в проективной геометрии. Функции и алгебраические соотношения, выражающие их в проективных координатах, должны быть инвариантны относительно всех однородных линейных преобразований. Кэлли первый перешел от рассмотрения определителей к более общим инвариантам. Этот путь отразился в заглавии его работы, Mémoire sur les Hyperdéterminants [1] (1846), которую можно считать свидетельством о рождении теории инвариантов. В более поздних шести знаменитых Memoirs on Quantics [2] (1854—1859) ему удалось, среди других результатов, получить полную систему инвариантов для кубических и биквадратичных форм. Его работу продолжили в Англии Сильвестр и Сальмон. Сильвестр преподавал несколько лет в Johns Hopkins University и там основал первый математический журнал на американском континенте: The American Journal of Mathematics. Страницы первых томов этого журнала заполнены работами по теории инвариантов, вышедшими из-под плодовитого пера Сильвестра. В Германии приверженцами и продолжателями новой дисциплины стали Аронгольд, Клебш и Гордон. В Италии эта область привлекла Бриоши, Кремона, Бельтрами и Капелли. Этот ранний период развития теории инвариантов носил исключительно формальный характер: на первый план ставилось развитие формальных процессов и фактическое вычисление инвариантов. Почти все работы имели дело с одной группой — непрерывной группой всех однородных линейных преобразований.

Другой импульс, в несколько отличном направлении, дала теория чисел, более точно — арифметическая теория бинарных квадратичных форм. Здесь оказалось необходимым рассматривать не непрерывную, а дискретную группу — группу унимодулярных линейных подстановок с целыми коэффициентами. Гаусс в своих Disquisitiones arithmeticae исследовал эквивалентность квадратичных форм относительно этой группы. Кроме и после Гаусса выдающимися исследователями в этой области были Якоби в Германии и Эрмит во Франции.

За формальным периодом классической теории инвариантов последовал более критический и идейный, решавший общие проблемы теории инвариантов конечных форм не столько посредством прямых вычислений, сколько путем развития соответствующих общих понятий и их общих свойств по тем абстрактным направлениям, которые позже повсеместно вошли в моду во всей алгебре. Здесь следует упомянуть только одного человека — Гильберта. Его работы (1890—1892) знаменуют поворотный пункт в истории теории инвариантов[3]. Он решил основные проблемы и тем самым почти убил весь предмет. Но все же в последующие десятилетия жизнь теории инвариантов влачится, хотя и слабо теплясь. А. Гурвитц делает новый и важный вклад, введя интегральные процессы, распространяющиеся на групповое многообразие (1897); в Англии А. Юнг, разрабатывая это поле более или менее в одиночку, получает важные результаты, относящиеся к представлениям симметрической группы, и использует их для целей теории инвариантов (1900 и позже). В последнее время древо теории инвариантов обнаружило новую жизнь и начало снова цвести, главным образом, вследствие интереса к вопросам теории инвариантов, пробужденного революционным развитием теоретической физики (теории относительности и квантовой механики), но также и благодаря связи теории инвариантов с распространением теории представлений на непрерывные группы и алгебры.

Появление проективной геометрии произвело столь подавляющее впечатление на геометров первой половины XIX в., что они начали стараться втиснуть все геометрические рассмотрения в проективную схему. В соответствии с этим сужение проективной группы до аффинной группы или группы эвклидовых движений метрической геометрии осуществлялось путем присоединения так называемых „абсолютных“ объектов: бесконечно удаленной плоскости, абсолютной инволюции. То же стремление проявляется, когда метрическую геометрию в векторном пространстве трактуют, допуская произвольные аффинные системы координат и произвольные линейные преобразования, присоединив при этом фундаментальную метрическую форму $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ как нечто абсолютное, вместо того, чтобы ограничиться лишь метрически эквивалентными декартовыми системами координат и соответствующей группой ортогональных преобразований. Этот подход, будучи легко распространимым на инфинитезимальную геометрию, остался в употреблении и весьма успешно применялся, в частности, для целей общей теории относительности. В теории групп он сводится к тому, что каждая группа линейных преобразований рассматривается как подгруппа полной линейной группы и в связи с ней. Диктаторский режим проективной идеи в геометрии впервые начал последовательно разрушать немецкий астроном и геометр Мебиус. Но классическим документом демократической платформы в геометрии, утверждающим группу преобразований как руководящий принцип в любого рода геометрии и предоставляющим равные права на независимое рассмотрение каждой и всякой такой группе, была Эрлангенская программа Клейна. Приноровление теории инвариантов к этой точке зрения происходило медленно; оно не могло быть выполнено без учета того, что изучению инвариантов групп должно предшествовать изучение самих групп и их представлений.

Решающим для развития *теории групп* было открытое Э. Галуа (1832) применение групп подстановок для исследования алгебраических уравнений; он заметил, что связь между алгебраическим расширением $K$ и исходным полем $k$ в значительной степени определяется группой автоморфизмов. Его теорию можно описать как алгебраическую теорию относительности для конечных множеств чисел, заданных как корни алгебраического уравнения[4]. Краткие намеки Галуа долгое время оставались книгой за семью печатями. Только с монографией C. Jordan'a „Traité des Substitutions“ (1870) вновь завоеванное поле было открыто для более широкого круга математиков. Алгебраические проблемы, связанные с эллиптическими и модулярными функциями, — деление, преобразование, комплексное умножение, — доставили наиболее важный материал для новых концепций. Возглавив это направление, Ф. Клейн и А. Пуанкарэ создали теорию автоморфных функций. В то время как теория Галуа имеет дело с конечными группами, здесь выдвинулись на первый план бесконечные дискретные группы. Нужды кристаллографии побудили к детальному изучению бесконечных дискретных групп движений[5]. Софус Ли положил начало общей теории непрерывных групп с инфинитезимальной точки зрения и показал ее важность многочисленными применениями к геометрическим вопросам и к дифференциальным уравнениям [6].

*Теория представлений групп линейными преобразованиями* была создана, в первую очередь, Г. Фробениусом [7] в течение 1896—1903 гг. Бэрнсайд независимо от него и И. Шур — продолжая его, нашли существенно более простой подход, выдвинув на первый план саму матрицу представления, вместо ее следа — фробениусовского характера. Для инфинитезимальных групп Ли Э. Картан доказал основные предложения об их строении и представлениях [8]. Все это тесно связано с гиперкомплексными системами чисел или алгебрами. После создания Гамильтоном исчисления кватернионов (1843) и долгого периода более или менее формальных изысканий, в которых наиболее выдающуюся роль сыграл Б. Пирс, Молин (1892) был фактически первым, кто достиг некоторых общих и глубоких результатов в этом направлении [9]. Первостепенную важность для современного развития теории имела работа Веддербёрна [10] от 1908 г., где он исследует ассоциативные алгебры над произвольным числовым полем $k$; в качестве фундаментального следует также упомянуть исследование И. Шура о неприводимых представлениях над произвольным числовым полем (1909) [11]. После этого теория алгебр продвигалась вперед, в Америке главным образом трудами Л. Диксона и А. А. Алберта, в Германии — Эмми Нётер и Р. Брауэром.

Этим кратким перечислением имен вместо реальной истории мы удовольствуемся здесь в качестве нашего связующего звена с прошлым [12]. Библиография поможет пополнить картину в отношении современного периода.

## 2. Основные предложения теории инвариантов

Будет удобно, прежде чем итти дальше, проиллюстрировать понятие векторного инварианта (глава I, § 5) двумя хорошо известными примерами — симметрической группы и ортогональной группы.

Теория алгебраических уравнений приводит к рассмотрению симметрических функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $n$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. функций, инвариантных относительно группы $\pi_n$ всех $n!$ возможных подстановок $n$ аргументов. Эти подстановки суть, очевидно, линейные преобразования $n$-мерного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Элементарные симметрические функции

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ суть коэффициенты полинома $\Phi(t)$ от неизвестной $t$,

$$\Phi(t) = (t - x_1)(t - x_2)\ldots(t - x_n) = \\ = t^n - \varphi_1(x)\,t^{n-1} + \varphi_2(x)\,t^{n-2} - \ldots \pm \varphi_n(x), \tag{2.1}$$

корнями которого служат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Таким образом,

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x) = \sum\limits_i x_i, \\ \varphi_2(x) = \sum\limits_{i<k} x_i x_k, \\ \varphi_3(x) = \sum\limits_{i<k<l} x_i x_k x_l, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_n(x) = x_1 x_2 \ldots x_n. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Основным фактом, относящимся к симметрическим функциям, является то, что они могут быть выражены через элементарные симметрические функции $\varphi_i(x)$. Более подробно, для любой симметрической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $n$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ существует функция $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ от $n$ аргументов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ такая, что

$$f(x) = F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)). \tag{2.3}$$

Мы говорим, что функции $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ образуют функциональный базис для семейства симметрических функций. Это предложение почти тривиально, если брать понятие функции в его наиболее широком объеме, поскольку оно тогда утверждает просто, что значения элементарных симметрических функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ определяют значения аргументов $x_1, \ldots, x_n$, с точностью до их порядка, единственным образом. Действительно, уравнением $\Phi(t) = 0$ однозначно определяется множество его корней. Но если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *полином* от $x_1, \ldots, x_n$, то возникает вопрос, выражается ли $f$ через функции $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ тем же самым алгебраическим способом, т. е. существует ли *полином* $F$, для которого имеет место соотношение (2.3)? Справедливость этого и утверждается так называемой основной теоремой о симметрических функциях: функции $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ образуют *целый рациональный базис* для симметрических форм. Таким образом, ограничение гипотезы, а именно предположение, что заданная симметрическая функция — целая рациональная, сбалансировано соответствующим сужением заключения: функциональное выражение $F$ для $f$ через базис $\varphi$ также должно быть целым рациональным. Тем самым „алгебраическая теорема“, относящаяся к формам $f$, не есть частный случай „функциональной теоремы“, где функциональная зависимость в $f$ и $F$ понимается в наиболее широком смысле; напротив, лишь алгебраическая теорема и требует развитого доказательства.

Подобное положение является характерным для многих случаев. „Все инварианты варажаются через конечное их число“: эта так называемая *первая основная теорема теории инвариантов* подсказывается рассмотренным примером. Мы не можем утверждать ее справедливость для каждой группы $\gamma$: напротив, главной нашей задачей будет исследовать для каждой частной группы, существует ли для нее целый рациональный базис или нет; ответ, конечно, окажется утвердительным в наиболее важных случаях. В этих случаях — и это то, что я хочу подчеркнуть, — чисто функциональная часть, утверждающая, что значения всех инвариантов определяются значениями базисных инвариантов, окажется почти тривиальной; существенные трудности будут лежать только в алгебраической части.

Чтобы пролить дополнительный свет на этот вопрос, я выберу в качестве второго примера группу, управляющую классической эвклидовой геометрией, — группу $\Gamma = O(n)$ ортогональных преобразований. Рассмотрим функции от двух произвольных векторов $x$, $y$, инвариантные относительно всех (собственных и несобственных) ортогональных преобразований. Первая основная теорема утверждает, что скалярные произведения, которые можно построить с помощью этих двух векторов, а именно три произведения

$$(xx), \qquad (xy) = (yx), \qquad (yy), \tag{2.4}$$

образуют базис. Функциональная часть этого утверждения есть не что иное, как основное предложение о равенстве треугольников: „треугольники $ABC$ и $A'B'C'$ равны, если две стороны и заключенный между ними угол одного треугольника совпадают с соответствующими элементами другого“, или, что то же: „две фигуры, образованные парами векторов $x$, $y$ и $x'$, $y'$, конгруэнтны, т. е. могут быть переведены одна в другую путем надлежащего ортогонального преобразования тогда и только тогда, когда

$$(xx) = (x'x'), \qquad (xy) = (x'y'), \qquad (yy) = (y'y')“$$

Глубже лежит алгебраическое предложение, что каждая ортогонально инвариантная *форма* $f(x, y)$ представима в виде *полинома* от трех скалярных произведений (2.4). Посмотрим, сможем ли мы доказать это методами, используемыми при доказательстве сформулированной выше теоремы о конгруэнтности в аналитической $n$-мерной геометрии, где координаты изменяются в поле K всех вещественных чисел.

Пусть численно заданы два вектора $x$, $y$. „Классическим индуктивным построением“ (глава I, § 3) можно выбрать новую декартову систему координат $e^1, e^2, \ldots, e^n$ так, чтобы вектор $x$ был параллелен первому фундаментальному вектору $e^1$, а вектор $y$ лежал в плоскости $(e^1, e^2)$:

$$x = \alpha e^1,$$
$$y = \beta e^1 + \gamma e^2.$$

Целый рациональный инвариант $f(x, y)$ должен быть тогда равен $f(x', y')$, где

$$x' = (\alpha, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$y' = (\beta, \gamma, 0, \ldots, 0).$$

Таким образом, $f(x', y')$ есть полином от трех величин $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Но

$$\alpha^2 = (x'x') = (xx),$$
$$\alpha\beta = (x'y') = (xy),$$
$$\beta^2 + \gamma^2 = (y'y') = (yy);$$

поэтому

$$\alpha = \sqrt{(xx)}, \quad \beta = \frac{(xy)}{\sqrt{(xx)}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{(xx)(yy) - (xy)^2}{(xx)}}.$$

Итак, этот путь привел к появлению квадратных корней и знаменателя $(xx)$.

Однако от квадратных корней освободиться довольно легко. Мы нашли, что $f(x, y)$ равно некоторому полиному $F$ от величин $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Из инвариантности $f$ относительно частных ортогональных преобразований, состоящих в изменении направления первой или, соответственно, второй оси, следует, что $F$ не меняется при подстановках

$$(1)\ \gamma \to -\gamma; \qquad (2)\ \alpha \to -\alpha, \ \beta \to -\beta.$$

Полином $F$ есть линейная комбинация одночленов

$$M = \alpha^a \beta^b \gamma^c;$$

вследствие только что указанной инвариантности, показатель $c$ должен быть четным во всех членах полинома $F$, показатели же $a$ и $b$ должны быть в каждом члене одинаковой четности, т. е. либо оба четные, либо оба нечетные. Соответственно двум этим случаям, $M$ есть либо одночлен от квадратов $\alpha^2$, $\beta^2$, $\gamma^2$, либо такой одночлен, умноженный на $\alpha\beta$. Следовательно, $F$ может быть записан в виде полинома от $\alpha^2$, $\beta^2$, $\gamma^2$ и $\alpha\beta$, т. е. от

$$(xx),\quad (xy),\quad (yy),\quad \frac{(xy)^2}{(xx)}.$$

Таким образом, $f$ *рационально* выражается через скалярные произведения со степенью $(xx)$ в качестве знаменателя.

Аналогичным образом можно найти рациональное выражение для $f(x, y)$ через скалярные произведения, содержащее в качестве знаменателя степень $(yy)$. Комбинируя оба результата, можно, как мы скоро увидим (см. стр. 56), избавиться также от знаменателей. Однако в целом описанный метод слишком громоздок, чтобы располагать к обобщению его на случай более чем двух аргументов.

Проблема нахождения ортогональных инвариантов от произвольного числа векторных аргументов $x$, $y$, ..., $z$ будет решена в § 9 другим методом. Результат будет аналогичен полученному: симметричная матрица скалярных произведений

$$\left\| \begin{matrix} (xx) & (xy) & \ldots & (xz) \\ (yx) & (yy) & \ldots & (yz) \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ (zx) & (zy) & \ldots & (zz) \end{matrix} \right\| \tag{2.5}$$

будет представлять собой полную таблицу базисных инвариантов.

Это наводит на предположение, что для заданной группы $\Gamma$ линейных преобразований можно указать конечное число *типовых* базисных инвариантов, годное для любого числа векторных аргументов. Такая таблица должна состоять из определенных инвариантов, зависящих от некоторых „типовых“ векторных аргументов $u$, $v$, ..., и давать целый рациональный базис для инвариантов от произвольного числа векторных аргументов $x$, $y$, $z$, ..., если подставлять эти векторные аргументы $x$, $y$, $z$, ... во всех возможных комбинациях (не исключая повторений) вместо типовых векторных аргументов $u$, $v$, ... В этом смысле ортогональная группа имеет в качестве своего единственного типового базисного инварианта скалярное произведение $(uv)$.

Действительно, образуя все скалярные произведения (2.5), мы получим базис для инвариантов от независимых векторов $x$, $y$, ..., $z$, каково бы ни было их число $h$.

Когда предлагается выразить некоторые функции, например, инварианты, через заданные величины, например, базисные инварианты, существенно знать, зависимы эти величины между собой или нет. Так, базисные инварианты для симметрической группы (над полем комплексных чисел), элементарные симметрические функции $\varphi_i(x)$, независимы в том строгом функциональном смысле, что они могут одновременно принимать произвольно предписанные значения $a_i: \varphi_i(x) = a_i$. Действительно, компоненты $x_i$ вектора $x$ определятся как корни уравнения

$$t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} - \ldots \pm a_n = 0.$$

Алгебраическая независимость полиномов $\varphi_i(x)$, т. е. тот факт, что между ними не существует никакой рациональной зависимости, является непосредственным следствием этой строгой функциональной независимости. Желательно, однако, иметь чисто алгебраическое доказательство для этого чисто алгебраического предложения: что полином $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ от $n$ независимых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ равен нулю как полином от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, если он равен нулю как полином от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ после подстановки вместо $\xi_i$ элементарных симметрических функций $\varphi_i(x)$. Такое доказательство становится уже необходимым при оперировании в произвольном числовом поле вместо области комплексных чисел.

Мы проведем доказательство с помощью двойной индукции по числу $n$ и степени полинома $F$. Заметим, что

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x) = x_1 + \varphi_1'(x), \\ \varphi_2(x) = x_1\varphi_1'(x) + \varphi_2'(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) = x_1\varphi_{n-1}'(x), \end{cases}$$

где $\varphi_1', \ldots, \varphi_{n-1}'$ — элементарные симметрические функции от $x_2, \ldots, x_n$. Поэтому, если мы в тождестве

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$$

положим $x_1 = 0$, то получим

$$F(\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{n-1}', 0) = 0,$$

Так как мы принимаем в качестве предположения индукции, что $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n-1}$ алгебраически независимы, то заключаем, что

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 0) = 0,$$

откуда полином $F$ имеет вид

$$F = \xi_n G(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Так как $\varphi_n(x) \neq 0$, то $G(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0$; но $G$ имеет меньшую степень, чем $F$, и потому в силу второго предположения индукции должно обращаться в нуль тождественно.

Нет оснований ожидать, что это положение, с которым мы встретились здесь в случае симметрической группы, будет характерно и для общего случая; алгебраические соотношения между базисными инвариантами могут существовать, даже если множество последних не слишком обширно. Это имеет место, например, когда $\Gamma$ — знакопеременная группа, т. е. группа всех четных подстановок аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Совокупность базисных инвариантов для знакопеременной группы состоит из элементарных симметрических функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ и „разностного произведения“

$$\Delta(x) = \prod_{i<k} (x_i - x_k).$$

Квадрат последнего $\Delta^2$, „дискриминант“, есть симметрическая функция и потому выражается через функции $\varphi_i(x)$. Но, как мы увидим, это соотношение является в некотором смысле „единственным“ соотношением, связывающим нашу совокупность базисных инвариантов.

Докажем сначала, что инварианты $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x); \Delta(x)$ образуют целый рациональный базис для знакопеременной группы. Форма $f(x_1, \ldots, x_n)$, инвариантная относительно четных подстановок, переходит при всех нечетных подстановках в одну и ту же форму $f'$. Сумма $f + f' = F$ симметрична, тогда как разность $f - f' = g$ знакопеременна, т. е. изменяет свой знак при транспозиции двух переменных. Поэтому полином $g$ обращается в нуль, если отождествить два из его аргументов, скажем $x_i$ и $x_k$, и, значит, должен делиться на $x_i - x_k$. Делясь на каждый из простых полиномов $x_i - x_k$, $g$ должен делиться на их произведение $\Delta(x)$:

$$g = \Delta \cdot G.$$

Полином $G$, очевидно, симметричен. Выразив симметрические формы $F$ и $G$ через элементарные симметрические функции, мы получим для $f$ следующее выражение через функции $\varphi_i(x)$ и $\Delta(x)$:

$$f = \frac{1}{2}(F + \Delta \cdot G).$$

[То, что $\Delta$ входит только в первой степени, не представляется неожиданным, поскольку $\Delta^2$ может быть выражено в виде полинома $D$ от функций $\varphi_i(x)$.]

Обращаясь ко второй части нашего утверждения, заметим, что то, что упомянутое выше квадратное уравнение

$$\Delta^2 - D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0 \tag{2.7}$$

является единственным, связывающим наши базисные инварианты $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$; $\Delta(x)$, можно утверждать в обоих смыслах — как „функциональном“, так и „алгебраическом“. Что касается *функционального* аспекта, то заметим, что эти инварианты могут принимать произвольные значения $\varphi_1 = a_1, \ldots, \varphi_n = a_n$, $\Delta = b$, подчиненные лишь условию

$$b^2 = D(a_1, \ldots, a_n). \tag{2.8}$$

Действительно, коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ определяют с точностью до порядка нумерации корни $x_1, \ldots, x_h$, а соответственно этому порядку $\Delta(x)$ может принимать то или иное из значений $\pm b$, допускаемых соотношением (2.8). Что же касается *алгебраического* аспекта, то каждый полином $H(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta)$ от независимых переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $\eta$, тождественно обращающийся в нуль как полином от $x_1, \ldots, x_n$ после подстановки $\xi_i = \varphi_i(x)$, $\eta = \Delta(x)$, кратен левой части соотношения (2.7):

$$H(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta) = L(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta)\{\eta^2 - D(\xi_1, \ldots, \xi_n)\},$$

где $L$ — снова полином. Для доказательства будем рассматривать $H$ как полином от $\eta$ и разделим его на $\eta^2 - D(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Получим линейный остаток: $A(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \eta B(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Указанная выше подстановка $\xi_i = \varphi_i(x)$, $\eta = \Delta(x)$ даст оба равенства $A(\varphi) \pm \Delta B(\varphi) = 0$ соответственно порядку нумерации переменных $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ тождественно равны нулю, откуда $A(\xi) = B(\xi) = 0$.

Для вопроса о соотношениях между базисными инвариантами не менее поучительной, чем эта конечная группа, является непрерывная группа всех ортогональных преобразований. Выше мы рассмотрели инварианты, зависящие от двух векторов $x$, $y$. Базисные их инварианты $(xx)$, $(xy)$, $(yy)$ — по крайней мере если число измерений $\geqslant 2$ — могут принимать все численные значения, удовлетворяющие неравенству

$$(xy)^2 \leqslant (xx)(yy); \tag{2.9}$$

действительно, длины двух сторон треугольника и угол, заключенный между ними, могут быть произвольно заданы. Неравенство (2.9) с общей функциональной точки зрения, конечно, должно рассматриваться как соотношение; с точки же зрения алгебраической $(xx)$, $(xy)$, $(yy)$ независимы, так как они не связаны никаким алгебраическим уравнением.

Как ведут себя в этом отношении произвольное число $h$ независимых векторов $x, y, \ldots, z$ и таблица их скалярных произведений (2.5)? Скалярные произведения алгебраически независимы, коль скоро $h$ не превышает размерности $n$, но перестают уже быть независимыми, если $h > n$. Так, скалярные произведения $n+1$ векторов $x, y, \ldots, z$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} (xx) & (xy) & \ldots & (xz) \\ (yx) & (yy) & \ldots & (yz) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (zx) & (zy) & \ldots & (zz) \end{vmatrix} = 0.$$

В случае $h \leqslant n$ задача определения $h$ векторов $x, y, \ldots, z$, у которых матрица скалярных произведений (2.5) совпадает с заданной симметрической матрицей $\| a_{ik} \|$ с $h$ строками и столбцами, имеет в вещественном поле K решение тогда и только тогда, когда квадратичная форма с коэффициентами $a_{ik}$ является положительно определенной. Это утверждение есть лишь другая формулировка того хорошо известного факта, что такая форма может быть линейно преобразована в сумму квадратов независимых переменных. Как видим, таблица (2.5) базисных инвариантов ограничена лишь неравенствами, если $h \leqslant n$; алгебраические же уравнения появляются, как только число $h$ векторов превосходит размерность $n$. Чисто алгебраическое доказательство, годное при любом основном поле, будет дано в разделе С, § 17.

Мы доказали для случая $h = 2$, что каждая инвариантная форма $f(x, y)$, зависящая от двух векторов $x$, $y$, выражается как в виде

$$\frac{F((xx), (xy), (yy))}{(xx)^\alpha},$$

так и в виде

$$\frac{G((xx), (xy), (yy))}{(yy)^\beta},$$

где $F$ и $G$ — полиномы. Полином

$$\zeta^\beta F(\xi, \eta, \zeta) - \xi^\alpha G(\xi, \eta, \zeta)$$

при подстановке $\xi = (xx)$, $\eta = (xy)$, $\zeta = (yy)$ обращается в нуль. Так как $(xx)$, $(xy)$ и $(yy)$ алгебраически независимы, то он должен обращаться в нуль тождественно относительно $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Таким образом, $F$ делится на $\xi^\alpha$, скажем $F = \xi^\alpha F_1$, откуда

$$f(x, y) = F_1((xx), (xy), (yy)).$$

Несмотря на успех, достигнутый нами в доказательстве первой фундаментальной теоремы для ортогональных инвариантов от двух векторов, мы столкнемся с существенными осложнениями, если попытаемся обращаться тем же способом с $h > 2$ независимыми векторами. Этот метод становится уже совершенно безнадежным, когда $h$ превосходит размерность $n$ и скалярные произведения перестают быть линейно независимыми. Для преодоления этих трудностей требуется новый формальный аппарат.

Первой основной проблемой в теории векторных инвариантов заданной группы Г является определение системы базисных инвариантов, и первая основная теорема (справедливость которой, однако, мы не можем утверждать для всех групп) устанавливает конечность такого базиса. Вторая основная проблема состоит в определении „всех“ алгебраических соотношений, имеющихся между базисными инвариантами

$$\varphi_1(x, y, \ldots), \quad \varphi_2(x, y, \ldots), \quad \ldots, \quad \varphi_r(x, y, \ldots),$$

или, вернее, в нахождении некоторого числа таких соотношений, алгебраическими следствиями которых являлись бы все остальные. Конечность этого числа устанавливается *второй основной теоремой теории инвариантов*. Она верна для любой группы, для которой справедлива первая основная теорема; действительно, она является частным случаем общей теоремы Гильберта, утверждающей, что каждый полиномиальный идеал имеет конечный базис (см. библиографические указания к главе VIII, [4]). Последняя теорема впервые была получена Гильбертом как раз в этом контексте теории инвариантов. Все полиномы $R(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ („соотношения“) от $r$ независимых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, обращающиеся после подстановки $\xi_i = \varphi_i(x, y, \ldots)$ тождественно в нуль как полиномы от $x, y, \ldots$, образуют идеал $\mathfrak{J}$ в кольце полиномов от неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_r$. Согласно теореме Гильберта, идеал $\mathfrak{J}$ имеет конечный базис $R_1, \ldots, R_t$. Таким образом, все соотношения $R = 0$, имеющие место между $r$ базисными инвариантами $\varphi_i(x, y, \ldots)$, являются следствиями $t$ соотношений

$$R_1 = 0, \ldots, R_t = 0.$$

Это общее решение нашей проблемы не освобождает нас от обязанности действительного определения базиса $R_1, \ldots, R_t$ для соотношений в каждом частном случае, который может нам встретиться.

## А. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

### 3. Первый пример: симметрическая группа

После долгого периода планирования нашего путешествия настал, наконец, момент отправления; мы приступаем теперь к систематическому исследованию векторных инвариантов. Первой нашей заботой будет первая основная теорема, которую мы докажем прямым построением конечного целого рационального базиса для наиболее важных групп. В этом параграфе мы изучим группу $\pi_n$ всех $n!$ подстановок $n$ компонент $x_1, \ldots, x_n$ общего вектора $x$.

Из определения поляризации (глава I, § 1) непосредственно следует, что она переводит инвариант в инвариант, какая бы группа Г линейных преобразований нашего $n$-мерного векторного пространства ни была положена в основу. Более подробно, если $f(x, y, \ldots)$ — форма, зависящая от нескольких векторов $x, y, \ldots$ и инвариантная относительно когредиентного их преобразования любым элементом из Г, то поляризованная форма $D_{ux} f(x, y, \ldots)$ также является инвариантом; здесь $u$ есть новый вектор, преобразующийся когредиентно с остальными. На этом замечании основывается важность поляризации для теории инвариантов.

В § 2 упоминалась фундаментальная алгебраическая теорема, гласящая, что элементарные симметрические функции (2.2) образуют целый рациональный базис для инвариантов $f(x)$ симметрической группы $\pi_n$, зависящих от одного вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Нашей задачей теперь будет решение той же проблемы для инвариантов $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$, зависящих от произвольного числа $m$ независимых векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$. Сразу напрашивается предположение, что *полная поляризация функций* (2.2) *даст полную таблицу типовых базисных инвариантов.* Приписав к $\varphi_i$ множители $i!$, мы придадим поляризованной таблице (2.2) вид

$$(3.1)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varphi_1(u)=\sum u_i & \\ \varphi_2(u, v)=\sum u_i v_k & (i\neq k) \\ \varphi_3(u, v, w)=\sum u_i v_k w_l & (i,\ k,\ l \text{ попарно не равны}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \varphi_n(u, v, \dots, w)=\sum u_i v_k \dots w_l & (i, k, \dots, l \text{ попарно не равны}) \end{array}\right.$$

Наше утверждение означает (§ 2), что для получения целого рационального базиса для инвариантов $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$, зависящих от $m$ векторных аргументов $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$, достаточно подставить в формы (3.1) эти аргументы вместо „типовых“ аргументов $u$, $v$, $w$, ... во всех возможных комбинациях (включая повторения):

$$\varphi_i(x^{(\alpha_1)}, x^{(\alpha_2)}, \dots, x^{(\alpha_i)})$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i=1, 2, \dots, m;\ i=1, 2, \dots, n).$$

Чтобы избежать нагромождения индексов, обозначим рассматриваемые $m$ векторных аргументов через $x$, $y$, ..., $z$. Доказательство проведем путем полной индукции по размерности $n$. Для этой цели будем рассматривать каждый вектор $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ как комбинацию числа $x_1$ с $(n-1)$-мерным вектором $x'=(x_2, \dots, x_n)$. Элементарные симметрические функции от $(n-1)$-мерных векторов (неполяризованные и поляризованные) будут обозначаться через $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_{n-1}$. Каждая форма $f(x, y, \dots, z)$ является агрегатом (линейной комбинацией) членов

$$x_1^\alpha y_1^\beta \dots z_1^\gamma\cdot f_{\alpha\beta\dots\gamma}(x', y', \dots, z').$$

Если $f$ симметрична, то симметричны также $f_{\alpha\beta\dots\gamma}$, и, согласно нашему предположению о справедливости теоремы для $n-1$ измерений, $f_{\alpha\beta\dots\gamma}$ выражаются (целым рациональным образом) через поляризованные элементарные симметрические формы $\varphi'_1, \dots, \varphi'_{n-1}$. Таким образом, заданная форма $f(x, y, \dots, z)$ представляется в виде агрегата из членов

$$x_1^\alpha y_1^\beta \dots z_1^\gamma\cdot(\varphi'_1)^{\rho_1}(\varphi'_2)^{\rho_2}\dots(\varphi'_{n-1})^{\rho_{n-1}},$$

где $(\varphi_i')^{\rho_i}$ обозначает произведение $\rho_i$ множителей $\varphi_i'$, зависящих, каждый, вообще говоря, от различных аргументов.

Воспользуемся теперь равенствами (2.6) в их поляризованной форме

$$\varphi_i(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(i)}) = \varphi_i'(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(i)}) + \sum_{\alpha=1}^{i} x_1^{(\alpha)} \varphi_{i-1}'(x^{(1)}, \ldots, x^{(\alpha-1)}, x^{(\alpha+1)}, \ldots, x^{(i)})$$

$$(i=1, \ldots, n-1;\ \varphi_0'=1),$$

и выразим отсюда $\varphi_i'$ через $\varphi_i$, $\varphi_{i-1}'$ и переменные $x_1, y_1, \ldots, z_1$. Этим способом мы последовательно исключим величины

$$\varphi_{n-1}', \varphi_{n-2}', \ldots, \varphi_1',$$

заменив их на $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots, \varphi_1$ и $x_1, y_1, \ldots, z_1$. $f(x, y, \ldots, z)$ выразится тогда в виде агрегата из членов

(3.2) $$x_1^{\alpha} y_1^{\beta} \ldots z_1^{\gamma} \cdot (\varphi_1)^{\rho_1} \ldots (\varphi_{n-1})^{\rho_{n-1}}.$$

Вторая часть такого члена симметрична, даже если первая компонента $x_1$ каждого из векторов $x$ заменяется его компонентами $x_2, \ldots, x_n$. Так как функция $f$ симметрична относительно всех $n$ компонент, то член (3.2) можно заменить на

$$(\varphi_1)^{\rho_1} \ldots (\varphi_{n-1})^{\rho_{n-1}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \ldots z_i^{\gamma}.$$

Но стоящая здесь сумма получается путем последовательной поляризации из степенной суммы

$$\sigma_\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\nu} \qquad (\nu = \alpha + \beta + \ldots + \gamma),$$

а хорошо известные формулы Ньютона показывают, как выразить эти суммы через элементарные симметрические функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Чтобы не оставлять никакого пробела в доказательстве, приведем простейший вывод этих формул. Полином

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda x_i) = 1 - \varphi_1(x)\lambda + \varphi_2(x)\lambda^2 - \ldots \pm \varphi_n(x)\lambda^n$$

имеет логарифмическую производную

$$-\frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-\lambda x_i} = \sigma_1(x) + \sigma_2(x)\lambda + \sigma_3(x)\lambda^2 + \dots$$

При этом ряд Тэйлора в правой части следует понимать в формальном смысле, так что никаких вопросов о сходимости не возникает:

$$-\psi'(\lambda) \equiv \psi(\lambda)\cdot \sum_{\nu=1}^{N} \sigma_\nu(x)\lambda^{\nu-1} \qquad (\mathrm{mod}\,\lambda^N).$$

Отсюда вытекают рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \sigma_1(x), \\ -2\varphi_2(x) &= -\varphi_1(x)\sigma_1(x) + \sigma_2(x), \\ 3\varphi_3(x) &= \varphi_2(x)\sigma_1(x) - \varphi_1(x)\sigma_2(x) + \sigma_3(x), \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

с условием $\varphi_\nu(x) = 0$ при $\nu > n$.

Следует заметить, что случай $n=1$ также охватывается нашим индуктивным рассуждением, и тем самым теорема доказана нами во всех деталях.

## 4. Тождество Капелли

Мы показали в предыдущем параграфе, что целый рациональный базис для инвариантов симметрической группы, зависящих от одного векторного аргумента, путем полной поляризации превращается в целый рациональный базис для инвариантов, зависящих от произвольного числа векторных аргументов. Однако дело обстоит определенно не так, если речь идет о произвольной линейной группе Г. Замечательно, что тем не менее целый рациональный базис для инвариантов, зависящих от $n$ аргументов, где $n$ — порядок группы Г, все же дает путем полной поляризации базис для $m > n$ аргументов. Для доказательства этого нам понадобится один мощный формальный инструмент — тождество Капелли[13]. Оно относится к результату последовательных поляризаций.

Пусть $x$, $y$, $z$, ... — ряд независимых (ковариантных или контравариантных) векторов в $n$-мерном векторном пространстве и $x'$, $y'$, $z'$, ... — те же векторы, взятые в (том же или) другом порядке. Символы $\Delta_{x'x}$, равно как и $D_{x'x}$, будут обозначать поляризацию. Подвергая форму $f(x, y, z, \dots)$ нескольким последовательным поляризациям $D_{x'x}$, $D_{y'y}$, $D_{z'z}$ и предполагая, что $x'$ не совпадает ни с $y$, ни с $z$, и $y'$ не совпадает с $z$, мы получим

$$D_{z'z}D_{y'y}D_{x'x}f=\sum_{i,k,l} x'_i y'_k z'_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial y_k \partial z_l}.$$

Выражение, стоящее в правой части, независимо от наличия или отсутствия указанных совпадений, мы будем записывать, употребляя вместо композиции символов $D_{x'x}$, $D_{y'y}$, ... композицию вспомогательных символов $\Delta_{x'x}$, $\Delta_{y'y}$, ...:

$$\Delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x}f=\sum_{i,k,l} x'_i y'_k z'_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial y_k \partial z_l}.$$

Подсчитаем, насколько отличается композиция $D_{z'z}D_{y'y}D_{x'x}$ от этой „псевдо-композиции". Введем для этой цели символ $\delta_{x'x}$, определенный формулой

$$\delta_{x'x}=\begin{cases}1, & \text{если } x'=x,\\ 0, & \text{если } x'\neq x.\end{cases}$$

Тогда из наших определений непосредственно получим:

$$D_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x}f=\sum_{l} z'_l\frac{\partial}{\partial z_l}\left(\sum_{i,k} x'_i y'_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_k}\right)=$$

$$\begin{aligned}=\sum_{i,k,l} x'_i y'_k z'_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial y_k \partial z_l}+\delta_{x'z}\sum_{i,k} z'_i y'_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_k}+\\ +\delta_{y'z}\sum_{i,k} x'_i z'_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_k}=\\ =\Delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x}f+\delta_{x'z}\Delta_{y'y}\Delta_{z'x}f+\delta_{y'z}\Delta_{z'y}\Delta_{x'x}f.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Нас будет особенно интересовать знакопеременная сумма

$$\sum\pm D_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x}=\begin{vmatrix}D_{z'z}&\Delta_{z'y}&\Delta_{z'x}\\ D_{y'z}&\Delta_{y'y}&\Delta_{y'x}\\ D_{x'z}&\Delta_{x'y}&\Delta_{x'x}\end{vmatrix},$$

распространенная на 3! подстановок символов $x'$, $y'$, $z'$. Индивидуальные члены в разложении этого операторного определителя следует писать так, чтобы множители располагались слева направо, как они стоят в самом определителе: первый множитель из первого столбца, второй множитель из второго столбца и т. д.; этого же правила мы будем придерживаться и во всем дальнейшем. Выполнив в (4.1) альтернирование, мы можем обменять местами $x'$ и $z'$ во втором члене справа и $y'$ и $z'$ в третьем, изменив знаки этих членов. Мы получим, таким образом,

$$\sum_{(x', y', z)} \pm D_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} = \sum \pm \Delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} - 2\sum \pm \delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x},$$

или

$$\sum \pm (D_{z'z} + 2\delta_{z'z})\,\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} = \sum \pm \Delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x}.$$

С помощью операторных определителей этот результат можно записать в форме

$$(D_3) \qquad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{uz} & \Delta_{uy} & \Delta_{ux} \\ D_{zz}+2 & \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yz} & \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ D_{xz} & \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{uz} & \Delta_{uy} & \Delta_{ux} \\ \Delta_{zz} & \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yz} & \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xz} & \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix},$$

понимая под этим равенство соответственных миноров третьего порядка.

Этому равенству для трех последовательных поляризаций предшествуют получаемые аналогичным образом равенства для одной или двух таких операций:

$$(D_1) \quad \begin{vmatrix} \cdot \\ \cdot \\ D_{zx} \\ D_{yx} \\ D_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \Delta_{zx} \\ \Delta_{yx} \\ \Delta_{xx} \end{vmatrix}; \qquad (D_2) \quad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix}.$$

Распространение на четыре и большее число последовательных поляризаций очевидно. Применяя сначала ($D_2$) к последним двум столбцам левой части соотношения ($D_3$), а затем ($D_1$) к последнему столбцу, мы получим основное равенство, вывод которого был нашей целью:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{zz}+2 & D_{zy} & D_{zx} \\ D_{yz} & D_{yy}+1 & D_{yx} \\ D_{xz} & D_{xy} & D_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{zz} & \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yz} & \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xz} & \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix}.$$

Аналогично для $m$ независимых векторов $x, y, \dots, z$ вместо трех получим

$$\begin{vmatrix} D_{zz}+(m-1) & \dots & D_{zy} & D_{zx} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{yz} & \dots & D_{yy}+1 & D_{yx} \\ D_{xz} & \dots & D_{xy} & D_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{zz} & \dots & \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \Delta_{yz} & \dots & \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xz} & \dots & \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix}.$$

(Приношу извинения за то, что $x, y, \dots, z$ пробегаются снизу вверх и спереди назад; это — следствие скверной привычки читать операторы справа налево.)

Операторный определитель в правой части преобразует $f(x, y, \dots, z)$ в

$$\sum_{i, k, \dots, l} \left(\sum \pm x'_i y'_k \cdots z_l\right) \frac{\partial^m f}{\partial x_i \partial y_k \dots \partial z_l},$$

где внутренняя сумма распространена знакопеременно на все перестановки $x', y', \dots, z'$ векторов $x, y, \dots, z$. Эта сумма равна нулю, если не все $m$ индексов $i, k, \dots, l$ различны. Так как последнее невозможно при $m > n$, то результат в этом случае равен нулю. При $m = n$ внутренняя сумма равна $\pm [xy \dots z]$ или 0, смотря по тому, представляет ли ряд $i, k, \dots, l$ четную или нечетную перестановку чисел $1, 2, \dots, n$, либо содержит одинаковые индексы; символ $[xy \dots z]$ означает здесь компонетный определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{vmatrix},$$

инвариантный относительно унимодулярной группы $SL(n)$; с исторической точки зрения интересно отметить, что именно от этого частного инварианта началось все развитие теории инвариантов. Таким образом, при $m = n$ мы получаем в правой части

$$[xy \dots z] \cdot \Omega f,$$

где $\Omega f$ образуется из $f$ посредством так называемого $\Omega$-процесса Кэли:

$$\Omega f = \sum_{(i,\, k,\, \ldots,\, l)} \pm \frac{\partial^n f}{\partial x_i \, \partial y_k \ldots \partial z_l} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_n} \end{vmatrix} f;$$

сумма здесь распространена знакопеременно на все перестановки $i, k, \ldots, l$ номеров $1, 2, \ldots, n$.

Итак, мы пришли к тождеству Капелли. В его окончательной форме обозначения $x, y, \ldots, z$ можно заменить более педантичными $x^1, x^2, \ldots, x^m$, а символы $D_{x^\beta x^\alpha}$ на $D_{\beta\alpha}$.

Теорема (II.4.A).

$$\begin{vmatrix} D_{mm} + (m-1) & \ldots & D_{m2} & D_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{2m} & \ldots & D_{22} + 1 & D_{21} \\ D_{1m} & \ldots & D_{12} & D_{11} \end{vmatrix} f = \begin{cases} 0 & \text{при } m > n, \\ [x^1 x^2 \ldots x^n] \cdot \Omega f & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Случаи $m > n$ и $m = n$ этой формулы мы назовем, соответственно, *общим и специальным тождествами Капелли.*

## 5. Редукция первой основной проблемы с помощью тождеств Капелли

Применение тождества Капелли к исследованию инвариантов, зависящих от $m$ векторных аргументов $x^1, x^2, \ldots, x^m$, может быть описано для произвольной группы $\Gamma$ линейных преобразований $A$ следующим образом. Поляризация $D_{\beta\alpha}$ переводит (абсолютный или относительный) инвариант $f(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ в инвариант $D_{\beta\alpha} f$ (с тем же мультипликатором). Специальное тождество Капелли показывает, что, в случае $m = n$, $\Omega f$ есть относительный инвариант, мультипликатор которого равен мультипликатору инварианта $f$, деленному на определитель преобразования. В частности, применение оператора $\Omega$ к абсолютному инварианту $f$ дает абсолютный инвариант, если Г состоит из унимодулярных преобразований; в последующем нас будет интересовать преимущественно этот случай.

Форма $f(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ имеет определенную степень $r_1, r_2, \ldots, r_m$ по каждому из своих аргументов $x^1, x^2, \ldots, x^m$. Сумма $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ есть полная ее степень. Мы расположим формы $f(x^1, x^2, \ldots, x^m)$, в первую очередь, по их полным степеням, т. е. будем считать $f$ в иерархии форм ниже чем $f^*$, если полная степень формы $f$ меньше полной степени формы $f^*$. Например, $\Omega f$ (в случае $m = n$) ниже чем $f$, так как $\Omega$-процесс уменьшает полную степень на $n$. В пределах же совокупности всех форм заданной полной степени мы будем придерживаться лексикографического расположения по индивидуальным степеням $r_1, \ldots, r_m$, т. е. $f$ будет считаться ниже чем $f^*$, если первая из степеней $r_1, \ldots, r_m$, в которых различаются $f$ и $f^*$, имеет меньшее значение для $f$. Формы, совпадающие по всем $m$ их степеням $r_i$, будут считаться имеющими одинаковый ранг; для них мы порядка старшинства определять не станем.

Главный член в операторном определителе тождества Капелли,

$$(D_{mm} + m - 1) \ldots (D_{22} + 1) D_{11},$$

преобразует $f$ в

$$r_1 (r_2 + 1) \ldots (r_m + m - 1) f = \rho f.$$

Численный множитель $\rho$ при $f$ отличен от нуля, если $r_1 > 0$, т. е. если $f$ действительно содержит первую переменную $x^1$. Относительно любого другого члена заметим, что в нем можно опустить диагональные множители $D_{\alpha\alpha} + \alpha - 1$; эффект их сводится просто к умножению $f$ на некоторые постоянные, которые мы объединим в один множитель $\rho^*$, включив в него и знак всего члена. Этот член принимает тогда вид

$$\rho^* D_{\beta_r \alpha_r} \ldots D_{\beta_2 \alpha_2} D_{\beta_1 \alpha_1},$$

где $\alpha_r > \alpha_{r-1} > \ldots > \alpha_2 > \alpha_1$, $\beta_i \neq \alpha_i$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ есть перестановка ряда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. При этом, как нетрудно убедиться, $r \geqslant 2$ и $\beta_1 > \alpha_1$. Так как главный член является единственным, в который не входит ни один множитель $D_{\beta\alpha}$ с различными индексами $\alpha$, $\beta$, то левая часть тождества Капелли приводится к виду

$$\rho f - \sum \mathcal{P} f^*,$$

где

$$\mathcal{P} = D_{\beta_r\alpha_r} \dots D_{\beta_2\alpha_2},$$

$$f^* = -\rho^* D_{\beta_1\alpha_1} f \qquad (\beta_1 > \alpha_1).$$

$D_{\beta_1\alpha_1} f$ имеет относительно $x^{\alpha_1}$ меньшую степень, чем $f$, относительно же $x^{\beta_1}$ — бо́льшую. Первое решает; так как $\alpha_1 < \beta_1$, то $f^*$ ниже, чем $f$.

Тождества Капелли можно теперь записать следующим образом:

$$(5.1) \qquad \rho f = \sum \mathcal{P} f^* \qquad (m > n),$$

$$(5.2) \qquad \rho f = \sum \mathcal{P} f^* + [x^1 x^2 \dots x^n]\, \Omega f \qquad (m = n),$$

где 1) $f^*$ и $\Omega f$ ниже чем $f$ и являются инвариантами, если $f$ — инвариант, 2) $\mathcal{P}$ есть последовательность поляризаций и 3) $\rho > 0$, если $f$ действительно содержит $x^1$.

Предположим теперь, что мы выбрали из (абсолютных) инвариантов группы Г, зависящих от $m$ векторных аргументов $x^1, \dots, x^m$, конечное множество

$$(5.3) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l,$$

относительно которых хотим доказать, что они образуют целый рациональный базис для всех этих инвариантов. Примем, что таблица (5.3) замкнута относительно поляризации.

Предположение I. *Каждое $D_{\beta\alpha}\varphi_j$ либо само есть одна из функций $\varphi$, либо, по крайней мере, выражается через эти функции целым рациональным образом.*

Я утверждаю: при этом предположении (5.3) является целым рациональным базисом для $m > n$ аргументов $x^1, \dots, x^m$, если те $\varphi_j$, которые не зависят от $x^1$, образуют целый рациональный базис для $m - 1$ аргумента $x^2, \dots, x^m$.

Действительно, в силу (5.1), $f$ выражается через множество (5.3), если этим свойством обладают инварианты $f^*$, входящие в правую часть. В самом деле, вследствие предположения I и формальных свойств (I.1.7) операторов поляризации, из выражения для $f^*$: $f^* = F^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l)$ получается аналогичное выражение для $\mathcal{P} f^*$, поскольку дело сводится к применению поляризаций $D_{\beta\alpha}$, из которых состоит $\mathcal{P}$, к аргументам $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ функции $F^*$. Действительно,

$$D_{\beta\alpha} F^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l) = \sum_k \frac{\partial F^*(\varphi_1, \dots, \varphi_l)}{\partial \varphi_k} D_{\beta\alpha}\varphi_k.$$

Наше рассуждение предполагает, что $f$ действительно содержит $x^1$, так как иначе $\rho$ было бы равно нулю. Но формы $f^*$ ниже, чем $f$. Применяя полную индукцию по рангу, мы будем вынуждены остановиться лишь, когда рассматриваемый инвариант $f$ окажется степени $r_1 = 0$ относительно $x^1$.

Можно сделать еще один шаг и даже в случае $m = n$ с помощью специального тождества Капелли (5.2) сократить число аргументов до $n - 1$, если прибавить еще

Предположение II (относящееся лишь к случаю $m = n$). *Определитель* $[x^1 x^2 \ldots x^n]$ *содержится среди функций* $\varphi$, *либо выражается через эти функции.*

Поскольку мы изменяем число $m$ аргументов, наш результат удобнее выразить в терминах типовых базисных инвариантов. Сформулируем это понятие еще раз. Пусть задано несколько инвариантов

$$(5.4) \qquad \varphi_1^*((u)), \quad \varphi_2^*((u)), \ldots,$$

зависящих *линейным образом* *) от некоторых векторных аргументов $u^1$, $u^2, \ldots$ (не обязательно одних и тех же для каждой функции); эти инварианты образуют полную таблицу типовых базисных инвариантов для $m$ аргументов, если (5.4) превращается в целый рациональный базис для инвариантов от $m$ аргументов $x^1, \ldots, x^m$ путем подстановки этих аргументов вместо $u^1$, $u^2, \ldots$ во всех возможных комбинациях (включая и повторения). Так как такая подстановка приводит к множеству (5.3), удовлетворяющему требованию I, то, применяя индукцию по $m$, заключаем:

Теорема (II.5.A). *Конечная таблица типовых базисных инвариантов линейной группы $n$-го порядка будет полной системой для любого числа $m$ аргументов, если это справедливо для $n$ аргументов; достаточно даже $n - 1$ аргументов, если предположить еще, что определитель* $[u^1 u^2 \ldots u^n]$ *содержится в этой таблице или, по крайней мере, выражается через ее инварианты.*

Даже если элементы $A$ группы $\Gamma$ не унимодулярны, первая часть теоремы сохраняет силу для относительных инвариантов,

---

*) Требование линейности *типовых* базисных инвариантов не является ограничением, поскольку полная поляризация формы любой степени всегда приводит к полилинейному выражению, которое, в свою очередь, при отождествлении аргументов приводит к исходной форме. Так как для линейной формы $f(x)$, $D_{yx}f(x) = f(y)$, то для полученной системы базисных инвариантов автоматически выполняется предположение I. *Ред.*

мультипликаторы которых принадлежат некоторой заданной группе, т. е. совокупности, содержащей вместе с любыми двумя мультипликаторами $\mu_1(A)$, $\mu_2(A)$ также $\frac{\mu_1(A)}{\mu_2(A)}$; вторая часть требует, чтобы группа содержала определитель преобразования $|A|$.

Почти во всех случаях доказательство первой основной теоремы состоит из двух частей: формальной части, в которой посредством тождеств Капелли проводится редукция к $n$ или $n-1$ аргументам, и другой, более содержательной части, в которой доказательство для этого ограниченного числа векторных аргументов осуществляется с помощью рассмотрений, сходных с примененными в доказательстве теоремы конгруэнтности в § 2. Формальную часть можно провести для любой группы, тогда как содержательная часть не может деградировать до столь общей механизированной процедуры и остается специфической для каждой отдельной группы. Как эта комбинация осуществляется — будет теперь показано для групп $SL(n)$ и $O(n)$.

## 6. Второй пример: унимодулярная группа $SL(n)$

Мы рассмотрим вопрос об *инвариантах унимодулярной группы* $SL(n)$ сразу для любого числа ковариантных или латинских векторов $x, y, \dots$ и любого числа контравариантных или греческих векторов $\xi, \eta, \dots$

Теорема (II.6.A).

$$[xy \dots z], \qquad (\xi x), \qquad [\xi\eta \dots \zeta]$$

*есть полная таблица типовых базисных инвариантов для унимодулярной группы.*

С помощью тождеств Капелли доказательство приводится к случаю, когда дано только $n-1$ латинских и $n-1$ греческих векторов

$$x^1, \dots, x^{n-1}; \ \xi^1, \dots, \xi^{n-1}. \tag{6.1}$$

Нашей целью будет показать, что зависящая от них инвариантная форма $f$ может быть выражена через $(n-1)^2$ произведений

$$(\xi^i x^k) \qquad (i, k = 1, \dots, n-1).$$

Предположим, что векторы (6.1) численно заданы произвольным образом, при условии лишь, что определитель

$$\Delta = \det_{i, k=1, \dots, n-1} (\xi^i x^k) \neq 0, \tag{6.2}$$

Лемма (II.6.B). *В предположении* (6.2) *можно ввести с помощью унимодулярного преобразования новую систему координат так, что* $x^1, \dots, x^{n-1}$ *совпадут с первыми* $n-1$ *базисными векторами* $e^1, \dots, e^{n-1}$, *а* $n$*-я компонента каждого из* $n-1$ *контравариантных векторов* $\xi^1, \dots, \xi^{n-1}$ *обратится в нуль.*

Принимая эту лемму за доказанную, мы будем действовать дальше следующим образом. *Перед* преобразованием имеем

$$(6.3)\qquad \begin{array}{l|l} x^1 = (x^1_1,\ x^1_2, \dots, x^1_n) & \xi^1 = (\xi^1_1,\ \xi^1_2, \dots, \xi^1_n) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ x^{n-1} = (x^{n-1}_1,\ x^{n-1}_2, \dots, x^{n-1}_n) & \xi^{n-1} = (\xi^{n-1}_1,\ \xi^{n-1}_2, \dots, \xi^{n-1}_n); \end{array}$$

*после* преобразования:

$$(6.4)\qquad \begin{array}{l|l} e^1 = (1,\ 0, \dots, 0,\ 0) & \bar{\xi}_1 = (\bar{\xi}^1_2,\ \bar{\xi}, \dots, \bar{\xi}^1_{n-1},\ 0) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ e^{n-1} = (0,\ 0, \dots, 1,\ 0) & \bar{\xi}^{n-1} = (\bar{\xi}^{n-1}_1,\ \xi^{n-1}_2, \dots, \bar{\xi}^{n-1}_{n-1},\ 0). \end{array}$$

Вследствие инвариантности форм $(\xi^i x^k)$,

$$(\xi^i x^k) = (\bar{\xi}^i e^k) = \bar{\xi}^i_k;$$

кроме того, инвариант $f$, зависящий от аргументов (6.3), равен той же функции $f$ от аргументов (6.4). Введем полином $\Phi\{\xi^i_k\}$ от $(n-1)^2$ переменных $\xi^i_k$ с помощью формулы

$$f\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \xi^1_1 & \dots & \xi^1_{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \xi^{n-1}_1 & \dots & \xi^{n-1}_{n-1} & 0 \end{array}\right) = \Phi\{\xi^i_k\}.$$

Последние два замечания приводят тогда к равенству

$$(6.5)\qquad f(x^1, \dots, x^{n-1} \mid \xi^1, \dots, \xi^{n-1}) = \Phi\{(\xi^i x^k)\},$$

выполняющемуся при подстановке любых векторов $x$ и $\xi$, удовлетворяющих алгебраическому неравенству (6.2). $\Delta$ не есть тождественный нуль, в чем убеждаемся, взяв в качестве как векторов $x^1, \dots, x^{n-1}$, так и векторов $\xi^1, \dots, \xi^{n-1}$, первые $n-1$ базисных векторов $e^1, \dots, e^{n-1}$ абсолютной системы координат. Поэтому, на основании принципа несущественности алгебраических неравенств, (I. 1, A), (6.5) есть тождество.

Доказательство леммы проводится следующим образом. При переходе от абсолютной системы координат $e^i$ к новой системе $\overline{e}^i$, определенном формулами

$$\begin{aligned} \overline{e}^1 &= x_1^1 e^1 + \ldots + x_n^1 e^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{e}^{n-1} &= x_1^{n-1} e^1 + \ldots + x_n^{n-1} e^n, \\ \overline{e}^n &= z_1 e^1 + \ldots + z_n e^n, \end{aligned}$$

векторы $x^1, \ldots, x^{n-1}$ совпадут с новыми осевыми векторами $\overline{e}^1, \ldots, \overline{e}^{n-1}$. Условие унимодулярности нашего преобразования выразится следующим линейным уравнением относительно неизвестных $z_k$:

$$\sum_{k=1}^{n} D_k z_k = 1, \tag{6.6}$$

где $D_k$ — миноры матрицы компонент

$$\left\| \begin{matrix} x_1^1 & \ldots x_n^1 \\ \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & \ldots x_n^{n-1} \end{matrix} \right\|. \tag{6.7}$$

Произвольный контравариантный вектор $\xi$ преобразуется по формулам

$$\begin{aligned} \overline{\xi}_i &= x_1^i \xi_1 + \ldots + x_n^i \xi_n \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\ \overline{\xi}_n &= z_1 \xi_1 + \ldots + z_n \xi_n. \end{aligned}$$

Потребовав, чтобы новые $n$-е компоненты $\overline{\xi}_n$ каждого из наших $n-1$ заданных контравариантных векторов $\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}$ обращались в нуль, мы тем самым присоединим к (6.6) следующие $n-1$ уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i z_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{6.8}$$

Система (6.6), (6.8) содержит $n$ уравнений для $n$ неизвестных $z_k$ и имеет однозначно определенное решение, если ее определитель

$$\left| \begin{matrix} \xi_1^1 & \ldots \xi_n^1 \\ \ldots & \ldots \\ \xi_1^{n-1} & \ldots \xi_n^{n-1} \\ D_1 & \ldots D_n \end{matrix} \right| \tag{6.9}$$

отличен от нуля. Этого уже было бы достаточно для доказательства нашей основной теоремы, поскольку мы с равным успехом могли бы воспользоваться этим определителем вместо $\Delta$. Однако можно показать простым формальным подсчетом, что $\Delta$ совпадает с (6.9).

Теорема и ее доказательство справедливы при любом основном поле $k$.

## 7. Теорема расширения. Третий пример: группа ступенчатых преобразований

В этом параграфе мы будем иметь дело исключительно с ковариантными векторами. Исходя из заданной группы $\Gamma$ линейных преобразований $n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, мы построим „*расширенную группу*“ $\Gamma^\nu$ относительно $n+\nu$ переменных

$$x_1, \ldots, x_n \,|\, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_\nu, \tag{7.1}$$

состоящую из всех матриц

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{Vmatrix}, \tag{7.2}$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$A \in \Gamma, \qquad \det C = 1. \tag{7.3}$$

Разбиение в (7.2) соответствует разбиению $n+\nu$ переменных на *основные* $(x_1, \ldots, x_n)$ и *присоединенные* $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_\nu)$. Если при $\nu = 1$ присоединение переменной $\bar{x}_1$ истолковать как переход к однородным координатам, то расширение $\Gamma^1$ будет представлять:

1) группу *параллельных переносов*, если $\Gamma$ состоит из одного лишь тождества;

2) группу, характеризующую *аффинное $n$-мерное пространство*, если $\Gamma$ есть $GL(n)$ или $SL(n)$;

3) группу, характеризующую *эвклидову геометрию*, если $\Gamma$ есть ортогональная группа $O(n)$ или $O^+(n)$.

Ввиду столь важных применений особенно приятно, что все инварианты расширенной группы $\Gamma^\nu$ определяются по инвариантам исходной группы $\Gamma$ посредством следующей простой и общей теоремы[14]:

Теорема (II.7.A). *Полный список типовых базисных инвариантов для расширенной группы $\Gamma^\nu$ получается из полного* *списка типовых базисных инвариантов для исходной группы* Г *путем присоединения определителя* $[x\ldots yz]$, *зависящего от* $n+\nu$ *типовых аргументов* $x, \ldots, y, z$.

Доказательство. Тождества Капелли сводят нашу задачу к доказательству того, что инвариант группы $\Gamma^{\nu}$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{\nu-1} \bar{x}_{\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_1 \ldots y_n \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{\nu-1} \bar{y}_{\nu} \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

зависящий от $n+\nu-1$ аргументов $x, \ldots, y$, не содержит присоединенных переменных и потому является инвариантом $n$-мерного пространства относительно Г. Предполагая $x, \ldots, y$ численно заданными векторами, для которых определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 \ldots x_n \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{\nu-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_1 \ldots y_n \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{\nu-1} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7.5}$$

сделаем следующую подстановку, принадлежащую $\Gamma^{\nu}$:

$$x'_i = x_i \quad (i = 1, \ldots, n); \quad \bar{x}'_\alpha = \bar{x}_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu-1);$$
$$\bar{x}'_\nu = (b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n) + (c_1 \bar{x}_1 + \ldots + c_{\nu-1} \bar{x}_{\nu-1} + \bar{x}_\nu).$$

$n+\nu-1$ коэффициентов $b_1, \ldots, b_n$; $c_1, \ldots, c_{\nu-1}$ можно определить так, чтобы для каждого из численно заданных векторов $x, \ldots, y$ последняя преобразованная компонента $\bar{x}'_\nu$ обратилась в нуль. Определителем $n+\nu-1$ линейных уравнений $\bar{x}'_\nu = 0, \ldots, \bar{y}'_\nu = 0$ для $n+\nu-1$ неизвестных коэффициентов $b_i$, $c_\nu$ является как раз (7.5). В силу инвариантности $f$ получаем, что функция (7.4) будет равна

$$f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{\nu-1} 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_1 \ldots y_n \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{\nu-1} 0 \end{pmatrix}.$$

Так как это равенство выполняется при подстановке любых аргументов, удовлетворяющих алгебраическому неравенству (7.5), то по принципу несущественности алгебраических неравенств оно должно быть формальным тождеством. Следовательно, $f$ не зависит от последней компоненты $\bar{x}_\nu$ ее векторных аргументов, Тем же путем убедимся в независимости от остальных присоединенных компонент $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\nu-1}$.

Непосредственно применяя теорему расширения (II.7.A), мы определим здесь полную таблицу типовых базисных инвариантов, зависящих от ковариантных векторов, только для группы „ступенчатых преобразований“, т. е. всех преобразований (7.2), удовлетворяющих условиям

$$\det A = 1, \qquad \det C = 1.$$

Мы снова предполагаем, что ступени имеют соответственно ширину $n$ и $\nu$, и пользуемся для основных и присоединенных компонент обозначением (7.1).

Теорема (II.7.B). *Все чисто ковариантные векторные инварианты группы ступенчатых преобразований выражаются через два типовые: (полный) компонентный определитель* $[x \ldots yz]_{\text{полн.}}$, *зависящий от всех* $n+\nu$ *аргументов, и (основной) компонентный определитель, зависящий от* $n$ *основных аргументов*:

$$[x \ldots y]_{\text{осн.}} = \begin{vmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1 \ldots y_n \end{vmatrix}.$$

Обобщение на лестницу, содержащую более чем две ступени, очевидно. В частности, можно рассматривать лестницу из $n$ ступеней ширины 1 в $n$-мерном пространстве, т. е. группу всех „рекуррентных матриц“

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} & 1 \end{Vmatrix},$$

у которых на главной диагонали стоят одни единицы. Инварианты этой группы называются *семи-инвариантами*.

## 8. Общий метод охвата контравариантных аргументов

Теорема расширения, установленная в последнем параграфе, действительна лишь для инвариантов ковариантных векторов. Однако существует общий метод вывода таблицы типовых базисных инвариантов для векторов обоих видов из таблицы типовых инвариантов для ковариантных векторов. Пусть $x^1, \ldots, x^{n-1}$

будут $n-1$ ковариантных или латинских векторов в $n$-мерном пространстве; миноры (($n-1$)-го порядка) матрицы компонент (6.7), надлежащим образом занумерованные и взятые попеременно с положительным и отрицательным знаком, являются компонентами контравариантного вектора $\xi$, который мы будем обозначать

$$\xi = [x^1 \dots x^{n-1}].$$

Это непосредственно следует из тождества

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1 & \dots & x_n \end{vmatrix} = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n = (\xi x)$$

для ковариантного вектора $x$, если предполагать, что в основу положена (произвольная) группа $\Gamma$ *унимодулярных* линейных преобразований. При истолковании $\xi$ как однородных координат точки в ($n-1$)-мерном проективном пространстве это есть хорошо известный процесс определения точки путем пересечения $n-1$ плоскостей.

Пусть $F(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots)$ — инвариантная форма, зависящая от некоторого числа латинских (ковариантных) и греческих (контравариантных) аргументов; в частности, пусть она будет степени $h \geqslant 1$ относительно $\xi$. Произведя сначала в $F$ поляризацию по $\xi$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \bar{\xi}_i,$$

а затем взяв в качестве $\bar{\xi}$ вектор $[x^1 \dots x^{n-1}]$, мы превратим $F$ в инвариант $G$, имеющий относительно $\xi$ степень $h-1$. Новые латинские векторы $x^1, \dots, x^{n-1}$, введенные в этом процессе, мы назовем *символическими векторами*. Результатом будет инвариант

$$\frac{1}{h} \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = G(x^1, \dots, x^{n-1}; \dots).$$

Мы приписали множитель $\frac{1}{h}$, чтобы обеспечить превращение нашего $G$ обратно в $F$ при *реституции* (восстановлении) $\xi$

вместо $[x^1 \dots x^{n-1}]$. $\xi$ называется *реституэнтой*. Процесс реституции применим к любому инварианту $G$, линейно зависящему от $n-1$ символических ковариантных векторов $x^1, \dots, x^{n-1}$:

$$G(x^1, \dots, x^{n-1}) = \sum b(i_1 \dots i_{n-1}) x^1_{i_1} \dots x^{n-1}_{i_{n-1}}.$$

Сначала $G$ путем альтернирования делается косо-симметрическим:

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum \pm G(x^1, \dots, x^{n-1}),$$

где сумма распространена знакопеременно на все перестановки векторов $x^1, \dots, x^{n-1}$, а затем производится реституция $[x^1 \dots x^{n-1}] \longrightarrow \xi$. Результат, который мы выразим символической записью $G(x^1, \dots, x^{n-1}) \longrightarrow F$, дается формулой

$$F = \frac{1}{(n-1)!} \sum \pm b(i_1 \dots i_{n-1}) \xi_{i_n},$$

где сумма распространена знакопеременно на все перестановки $i_1, \dots, i_{n-1}, i_n$ индексов $1, 2, \dots, n$.

Вот два простейших примера реституции:

$$(8.1) \qquad [x^1 \dots x^{n-1} x] \longrightarrow (\xi x),$$

$$(8.2) \qquad (\xi^1 x^1) \dots (\xi^{n-1} x^{n-1}) \longrightarrow \frac{1}{(n-1)!} [\xi^1 \dots \xi^{n-1} \xi].$$

Повторяя процесс, приводящий от $F$ к $G$, можно понижать степень, в которой входит $\xi$, пока она не обратится в нуль; исключив так $\xi$, можно таким же способом уничтожить и остальные греческие аргументы. Конечно, с каждым шагом этого процесса будут вводиться новые совокупности символических латинских векторов, и именно по этой причине столь важно, что мы обладаем таблицей типовых базисных инвариантов, достаточной для *любого числа* латинских аргументов. Наши рассмотрения приводят, очевидно, к следующей лемме:

Лемма (II.8.A). *Для того, чтобы доказать, что таблица типовых базисных инвариантов полна, достаточно убедиться в том:*

1) *что она содержит полную таблицу таких инвариантов лишь для ковариантных аргументов и*

2) *что „член“ (произведение базисных инвариантов), линейно содержащий $n-1$ символических векторов, превращается при реституции в инвариант, представимый с помощью базисных инвариантов нашей таблицы.* (При выполнении реституции можно пренебречь теми сомножителями этого члена,

которые не содержат символических аргументов, в частности, „чисто греческими“ множителями.)

Этот метод был детально разработан Вейтценбёком [15]; последний употребляет для символических векторов $x^1, \ldots, x^{n-1}$ так называемый „комплексный символ“ $p = (p_1, \ldots, p_n)$, один и тот же для каждого из этих векторов, и автоматически обеспечивает альтернирование, вводя правило умножения $p_k p_l = -p_l p_k$.

При применении этого метода приходится часто пользоваться некоторыми формальными тождествами для компонентных определителей. Если $L(x)$ — линейная форма, то

$$(8.3) \qquad \begin{vmatrix} L(x^1) & x_1^1 \ldots & . x_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L(x^{n+1}) & x_1^{n+1} \ldots & x_n^{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Последние $n - i$ векторов $x^{i+2}, \ldots, x^{n+1}$ обозначаем $x, y, \ldots, z$, развертываем определитель по первому столбцу и переносим последние $n - i$ членов в правую часть; получаем:

$$(8.4) \qquad [x^1 \ldots x^i x y \ldots z] \cdot L(x^{i+1}) - + \ldots = \\ = L(x) \cdot [x^1 \ldots x^{i+1} y \ldots z] - + \ldots$$

Сумма в левой части состоит из $i + 1$ членов с чередующимися знаками, получающихся из выписанного члена путем выбора в качестве аргумента в $L$ по одному вектору из ряда $x^1, \ldots, x^i, x^{i+1}$ и оставления других векторов в множителе при $L$ в их естественном порядке; так же следует поступить в выписанном справа члене с рядом $x, y, \ldots, z$, чтобы получить все стоящие справа члены.

Когда дан член, содержащий компонентный определитель, то тождество (8.4), очевидно, позволяет нам вводить в этот множитель один символический вектор за другим и тем самым легко подготовить его к реституции:

$$[x^1 \ldots x^{n-1} x] \rightarrow (\xi x).$$

Поэтому, если наша таблица содержит инвариант $(\xi x)$, можно предполагать в лемме (II.8.A), что член, подлежащий реституции, не содержит никакого компонентного определителя. Если в теореме (II.6.A) доказан уже один тот факт, что $[xy \ldots z]$ является единственным типовым базисным „латинским“ инвариантом для группы $SL(n)$, то это рассуждение в соединении с формулой (8.2) дает новое доказательство нашей теоремы (II.6.A) относительно векторов обоих видов.

Из (8.4) с помощью индукции выводится тождество

$$(8.5)\qquad \sum \pm [x^1 \dots x^l x \dots yz \dots u] \cdot L(x^{l+1}, \dots, x^k) = \\ = \sum \pm L(x, \dots, y) \cdot [x^1 \dots x^k z \dots u],$$

где $L$ — косо-симметрическая полилинейная форма от $k - i$ аргументов, сумма в левой части распространена знакопеременно на все „смеси“ векторов

$$x^1, \dots, x^l \quad \text{с} \quad x^{l+1}, \dots, x^k,$$

т. е. на все перестановки векторов $x^1, \dots, x^k$, сохраняющие порядок внутри каждой из обеих групп, правая же часть распространена на все „смеси“

$$x, \dots, y \quad \text{с} \quad z, \dots, u.$$

Это тождество вводит внутрь компонентного определителя одновременно еще $k - i$ символических векторов. Частным случаем является формула

$$(8.6)\qquad [x^1 \dots x^l x \dots y \bar{z}](\xi x^{l+1}) \dots (\eta x^{n-1}) \longrightarrow \begin{vmatrix} (\xi x) \dots (\xi z) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\zeta x) \dots (\zeta z) \end{vmatrix},$$

где $\zeta$ — реституэнта. В качестве применения докажем следующую теорему.

Теорема (II.8.B). *Присоединение к данной в теореме* (II.6.A) *таблице для* $SL(n+\nu)$ *компонентного определителя* $[x \dots y]_{\text{осн.}}$ *основных* $n$ *ковариантных аргументов* $x, \dots, y$ *и компонентного определителя*

$$(8.7)\qquad [\xi \dots \eta]_{\text{прис.}} = \begin{vmatrix} \bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_\nu \\ \underline{\ \cdot} \quad \cdot \quad \underline{\cdot} \\ \eta_1 \dots \eta_\nu \end{vmatrix}$$

*присоединенных* $\nu$ *контравариантных аргументов* $\xi, \dots, \eta$ *дает полную таблицу для группы ступенчатых преобразований, рассматриваемой в теореме* (II.7.B).

Согласно сделанному выше замечанию и формуле (8.2), требуют рассмотрения лишь члены, не содержащие ни одного полного компонентного определителя латинских векторов, но зато содержащие по крайней мере один компонентный определитель основных латинских векторов. Такой член мы расщепляем тогда на произведение множителей типа $[x \dots y]_{\text{осн.}}$ и произведение множителей типа $(\xi x)$. Первое из этих частичных произведений относится лишь к $n$-мерному пространству основных компонент, и, применяя к нему наше тождество, можно собрать все символические векторы $x^1, \ldots, x^l$, содержащиеся в этой части, в один такой множитель $[x \ldots y]_{\text{оси.}}$. Получим тогда член вида

$$[x^1 \ldots x^l x \ldots y]_{\text{осн.}} \cdot (\xi x^{l+1}) \ldots (\eta x^{\gamma+\nu-1}).$$

В абсолютной системе координат $e_1, \ldots, e_n, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_\nu$ первый множитель может быть записан в виде полного компонентного определителя

$$[x^1 \ldots x^l x \ldots y \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_\nu].$$

Применяя (8.6), получим, после реституции с реституэнтой $\zeta$,

$$\begin{vmatrix} (\xi x) \ldots (\xi y)(\xi \bar{e}_1) \ldots (\xi \bar{e}_\nu) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\zeta x) \ldots (\zeta y)(\zeta \bar{e}_1) \ldots (\zeta \bar{e}_\nu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\xi x) \ldots (\xi y)\, \bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_\nu \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\zeta x) \ldots (\zeta y)\, \bar{\zeta}_1 \ldots \bar{\zeta}_\nu \end{vmatrix}.$$

Разложение по последним $\nu$ столбцам показывает, что это — агрегат из членов вида $(\xi x)$ и (8.7).

## 9. Четвертый пример: ортогональная группа

При исследовании группы $O(n)$ всех собственно и несобственно ортогональных преобразований[16] $A$ удобно включить в рассмотрение (кроме абсолютных или „четных“ инвариантов) относительные инварианты особого рода (называемые „нечетными“), у которых мультипликатор $\mu(A)$ равен $+1$ для собственных и $-1$ для несобственных вращений. Определитель $n$ векторов $[x^1 \ldots x^\nu]$ есть нечетный инвариант. Специальное тождество Капелли показывает, что $\Omega f$ есть нечетный или четный инвариант соответственно четности или нечетности инварианта $f$. Теперь мы примем в качестве основного поля поле K всех вещественных чисел. В случае ортогональной группы не придется различать ковариантные и контравариантные векторы.

Нечетные инварианты, как и четные, являются абсолютными инвариантами для группы собственно ортогональных преобразований $O^+(n)$. *Обратно*, абсолютный инвариант $f$ группы $O^+(n)$ переводится при всех собственных вращениях в себя, а при всех несобственных вращениях — в одну и ту же новую форму $f'$, и потому $f$ является суммой четного и нечетного инвариантов относительно полной группы $O(n)$:

$$f=\frac{1}{2}(f+f')+\frac{1}{2}(f-f').$$

Теорема (II.9.A). *Скалярное произведение* $(uv)$ *и компонентный определитель* $[u^1u^2\ldots u^n]$ *образуют полную таблицу типовых базисных инвариантов ортогональной группы.*

Произведение двух компонентных определителей может быть выражено через скалярные произведения с помощью известного соотношения

$$(9.1)\qquad [x^1x^2\ldots x^n]\,[y^1y^2\ldots y^n]=\begin{vmatrix}(x^1y^1)\,(x^1y^2)\ldots(x^1y^n)\\ (x^2y^1)\,(x^2y^2)\ldots(x^2y^n)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ (x^ny^1)\,(x^ny^2)\ldots(x^ny^n)\end{vmatrix}.$$

В силу этого нашу теорему можно сформулировать следующим образом:

$T_n^m$. *Каждый четный ортогональный инвариант, зависящий от* $m$ *векторов* $x^1, x^2, \ldots, x^m$ *в* $n$*-мерном векторном пространстве, выражается через* $m^2$ *скалярных произведений* $(x^\alpha x^\beta)$. *Каждый нечетный инвариант является суммой членов*

$$[u^1u^2\ldots u^n]\cdot f^*(x^1,\ldots,x^m),$$

*где* $u^1,\ldots,u^n$ *берутся из ряда* $x^1,\ldots, x^m$, *а* $f^*$ — *четный инвариант.*

Доказательство следует схеме, принятой в § 6; однако, оно здесь несколько усложняется, так как отправной пункт для применения тождеств Капелли согласно § 5 должен быть подготовлен дополнительной индукцией по числу измерений пространства. Применением общего и специального тождеств Капелли теорема $T_n^m$ $(m\geqslant n-1)$ приводится к теореме $T_n^{n-1}$, относящейся к $n-1$ векторным аргументам в $n$-мерном пространстве. Если $x^1,\ldots,x^{n-1}$ суть $n-1$ численно заданных линейно независимых векторов, то можно ввести новую ортогональную систему координат так, чтобы они лежали в $(n-1)$-мерном пространстве, натянутом на первые $n-1$ фундаментальных векторов („неформальная" часть). Таким образом вопрос сводится к исследованию ортогональных инвариантов в $n-1$ измерениях или, более точно, так как эти инварианты зависят ровно от $n-1$ векторов, — к $T_{n-1}^{n-1}$. В соответствии с этим, представляется наилучшим сперва выполнить переход

(9.2) $$T_{n-1}^{n-1} \longrightarrow T_n^{n-1} \longrightarrow T_n^n,$$

а затем обобщить $T_n^n$ до $T_n^m$. Два шага, на которые разбивается согласно (9.2) переход $T_{n-1}^{n-1} \longrightarrow T_n^n$, выполняются, соответственно, путем „неформального“ рассуждения и специального тождества Капелли, тогда как переход $T_n^n \longrightarrow T_n^m$ $(m > n)$ основывается на общем тождестве Капелли. Поскольку очевидно, как провести вторую часть, обратимся к индуктивному доказательству теоремы $T_n^n$ по схеме (9.2). Сперва сформулируем эту теорему:

$T_n^n$. *Четный инвариант, зависящий от n векторов $x^1, \dots, x^n$ в n-мерном пространстве, выражается через $n^2$ их скалярных произведений; каждый нечетный инвариант получается из некоторого четного путем умножения на компонентный определитель* $[x^1 \dots x^{\nu}]$.

Проведем сначала переход $T_{n-1}^{n-1} \longrightarrow T_n^{n-1}$. Пусть

$$f(x, \dots, y) = f\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1, \dots, y_{n-1}, y_n \end{pmatrix}$$

— четный инвариант, зависящий от $n-1$ векторов $x, \dots, y$ в $n$-мерном пространстве. Функция

$$f_0\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1, \dots, y_{n-1} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{n-1}, 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1, \dots, y_{n-1}, 0 \end{pmatrix}$$

является четным ортогональным инвариантом $(n-1)$-мерных векторов и потому, согласно $T_{n-1}^{n-1}$, может быть выражена в виде полинома $F$ от $(n-1)^2$ скалярных произведений

$$\begin{matrix} (xx)^*, & \dots, & (xy)^*, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (yx)^*, & \dots, & (yy)^*, \end{matrix}$$

где

$$(xy)^* = x_1y_1 + \dots, + x_{n-1}y_{n-1}.$$

При $f$ нечетном, несобственно ортогональная подстановка

(9.3) $$J_n\colon\ x_1' = x_1,\ \dots,\ x_{n-1}' = x_{n-1},\ x_n' = -x_n$$

дала бы $f_0 = -f_0$, откуда $f_0 = 0$.

При численно заданных $x, \dots, y$ можно найти перпендикулярный ко всем им вектор $z \neq 0$ и затем применить классическое индуктивное построение декартовой системы координат таким образом, чтобы последняя ось $e^n$ совпала по направлению с $z$. В этой новой системе координат $e^1, \dots, e^n$ последняя компонента каждого из векторов $x, \dots, y$ обратится в нуль:

$$\begin{gathered} x = \bar{x}_1 e^1 + \dots + \bar{x}_{n-1} e^{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y = \bar{y}_1 e^1 + \dots + \bar{y}_{n-1} e^{n-1} \end{gathered}$$

Инвариантность функции $f$ относительно произведенного собственно ортогонального преобразования выразится уравнением

$$f(x, \dots, y) = f_0(\bar{x}, \dots, \bar{y}),$$

где $\bar{x}, \dots, \bar{y}$ суть $(n \to 1)$-мерные векторы с компонентами

$$\begin{gathered} \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \\ \dots\dots\dots \\ \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}. \end{gathered}$$

Если $f$ нечетна, то сразу получаем

$$f = 0. \tag{9.4}$$

Если же $f$ четна, то, как упомянуто выше, применяем $T_{n-1}^{n-1}$ к четному ортогональному $(n-1)$-мерному инварианту $f_0$ и получаем

$$f_0(x, \dots, y) = F\begin{pmatrix} (\bar{x}\bar{x}), & \dots, & (\bar{x}\bar{y}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\bar{y}\bar{x}), & \dots, & (\bar{y}\bar{y}) \end{pmatrix}.$$

Так как наше преобразование было ортогональным, то

$$(xy) = (\bar{x}\bar{y}),$$

и следовательно, как мы и утверждали,

$$f(x, \dots, y) = F\begin{pmatrix} (xx), & \dots, & (xy) \\ \dots & \dots & \dots \\ (yx), & \dots, & (yy) \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Равенства (9.4) и (9.5), первое — для нечетных, а второе — для четных инвариантов, верны при любом выборе численных векторов $x, \ldots, y$ и, следовательно, являются тождествами в формальном смысле. В результате, приняв $T_{n-1}^{n-1}$, имеем:

$T_n^{n-1}$. *Нечетных инвариантных форм от* $n-1$ *векторов в* $n$*-мерном пространстве не существует, каждый же четный инвариант от* $n-1$ *векторов выражается через их скалярные произведения.*

Следующий шаг $T_n^{n-1} \longrightarrow T_n^n$ производится путем применения специального тождества Капелли к инвариантам $f(x^1, \ldots, x^n)$, зависящим от $n$ векторов. Правая часть этого тождества

$$[x^1 \ldots x^n] \cdot \Omega f \tag{9.6}$$

содержит множитель $\Omega f$, имеющий меньший ранг, чем $f$. Если $f$ четно, то $\Omega f$ нечетно и по предположению индукции может быть выражено в виде произведения компонентного определителя $[x^1 \ldots x^n]$ на полином от скалярных произведений. Воспользовавшись тогда равенством

$$[x^1 \ldots x^n]^2 = \det(x^\alpha x^\beta) \qquad (\alpha, \ \beta = 1, \ \ldots, n),$$

мы выразим четный инвариант (9.6) через одни лишь скалярные произведения. Заметим, что только этот частный случай равенства (9.1) и используется в нашем доказательстве.

Рекомендуем читателю сравнить законченное таким образом доказательство с первыми неуклюжими попытками достижения того же результата в § 2; данное там обещание теперь выполнено. Изложенный метод проходит в том же виде при любом пифагоровом основном поле $k$.

По теореме расширения (II.7.A) мы можем определить полную таблицу типовых инвариантов, зависящих только от ковариантных векторов, для группы, характеризующей эвклидову геометрию ранга $\nu$ в $(n+\nu-1)$-мерном пространстве, т. е. для расширения $\Gamma^\nu$ собственно ортогональной группы $\Gamma = O^+(n)$. Эта таблица состоит из: скалярных произведений, компонентного определителя основных векторов и компонентного определителя всех векторов. С помощью метода комплексных символов Вейтценбёка можно охватить и контравариантные аргументы [17].

## В. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА КРУПНЫМ ПЛАНОМ

### 10. Рациональная параметризация ортогональной группы по Кэли

На первый взгляд наше требование, чтобы основное поле было пифагоровым, представляется необходимым в случае эвклидовой геометрии, где основным метрическим построением является откладывание заданного отрезка на заданной прямой. Поэтому покажется несколько неожиданным, что основные результаты остаются в силе для любого числового поля $k$ (характеристики 0). Это существенно основывается на возможности рациональной параметризации ортогональной группы, впервые обнаруженной Кэли [18]. К сожалению, параметрическое представление Кэли не охватывает некоторых ортогональных матриц, и значительная доля нашего труда будет потрачена на то, чтобы свести на нет эффект этих исключений. Затронута наша алгебраическая амбиция; мы прерываем общий ход изложения и обращаемся к более подробному изучению ортогональной группы при произвольном основном поле $k$.

Будем называть матрицу $A$ *неисключительной*, если

$$\det(E+A)\neq 0.$$

При этом условии введем матрицу $S$ посредством равенства

$$E+S=2(E+A)^{-1},$$

с обращением

$$E+A=2(E+S)^{-1}.$$

Матрица $S$ — также неисключительная, причем $A$ и $S$ взаимно связаны друг с другом соотношениями

$$S=(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A), \tag{10.1}$$

$$A=(E-S)(E+S)^{-1}=(E+S)^{-1}(E-S). \tag{10.2}$$

В силу перестановочности обоих множителей, последнее соотношение можно записывать также в форме

$$A=\frac{E-S}{E+S}.$$

Это и есть подстановка Кэли.

Пусть теперь $G=\|g_{ik}\|$ — произвольная матрица. Равенство

$$A^{*}GA=G \tag{10.3}$$

выражает условие, при котором подстановка $A$ оставляет инвариантной билинейную форму

$$\sum g_{ik}x_i y_k.$$

Лемма (II.10.A). *Если $A$ и $S$ — неисключительные матрицы, связанные соотношениями* (10.1) *и* (10.2), *а $G$ — произвольная матрица, то $A^*GA = G$ в том и только в том случае, когда*

$$S^*G + GS = 0. \tag{10.4}$$

Выполняя в (10.1) транспонирование, получаем

$$E - A^* = S^*(E + A^*).$$

Умножая справа на $GA$ и принимая во внимание (10.3), находим:

$$G(A - E) = S^*G(A + E),$$

что по умножении справа на $(A + E)^{-1}$ дает:

$$-GS = S^*G.$$

Обратно, приняв (10.4) и умножив транспонированное равенство (10.2)

$$A^*(E + S^*) = E - S^*$$

справа на $G$, получим

$$A^*G(E - S) = G(E + S),$$

что по умножении справа на $(E + S)^{-1}$ дает (10.3).

Польза подстановки (10.2) заключается в том, что она превращает квадратичные соотношения (10.3) для $A$ в линейные соотношения (10.4) для $S$. Мы используем эту лемму для случая, когда $G$ — симметричная неособенная матрица, в частности $G = E$, а также, когда $G$ — косо-симметричная неособенная матрица. Сформулируем наш результат в применении его к случаю $G = E$.

Теорема (II.10.B). *Каждая неисключительная ортогональная матрица $A$ представима в форме* (10.2), *где $S$ — неисключительная косо-симметричная матрица. Обратно, если $S$ — неисключительная косо-симметричная матрица, то матрица $A$, определенная формулой* (10.2), — *неисключительная ортогональная.*

На протяжении этого и следующих параграфов $S = \| s_{ik} \|$ будет обозначать косо-симметричную матрицу. Отметим равенство, имеющее место для этих матриц:

$$\det(E - S) = \det(E + S^*) = \det(E + S)^* = \det(E + S). \tag{10.5}$$

Это наталкивает на следующее любопытное замечание: матрица $A$, заданная формулой (10.2), имеет определитель $+1$, так как числитель и знаменатель в силу (10.5) имеют один и тот же определитель, неравный 0; следовательно, это представление, а потому и гипотеза $\det(E+A)\neq 0$, на котором оно основано, должны быть невозможны для несобственно ортогональных преобразований.

Следствие 1. *Для каждой несобственно ортогональной матрицы $A$ имеем*

$$\det(E+A)=0.$$

Если наше пространство имеет нечетную размерность $n$ и $A$ — собственно ортогональная матрица, то $-A$ будет несобственно ортогональной. Поэтому в таком пространстве для каждой собственно ортогональной матрицы $A$ имеем

$$\det(E-A)=0.$$

Из этого соотношения следует, что однородные линейные уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}(\delta_{ik}-a_{ik})\,x_k=0 \quad \text{или} \quad x_i=\sum_k a_{ik}x_k$$

имеют ненулевое решение $(x_1, \ldots, x_n)$.

Следствие 2. *Каждое собственное вращение в пространстве нечетной размерности обладает „осью“, проходящей через начало, точки которой при этом вращении остаются на месте.*

Простой факт, установленный в следствии 1, должен иметь более непосредственное основание, чем представленное нами. И оно достаточно просто. Взяв определитель от обеих частей равенства

$$A^*(E+A)=A^*+E,$$

находим для несобственного $A$:

$$-\det(E+A)=\det(A^*+E)=\det(E+A).$$

Обратимся теперь к более подробному исследованию собственно ортогональных матриц, в частности *исключительных* собственно ортогональных матриц $A$, т. е. удовлетворяющих уравнению

$$\det(E+A)=0.$$

Если матрица $A$ — исключительная, то тем же свойством обладает и любая сопряженная матрица $A' = U^{-1}AU$, где $U$ — произвольная ортогональная матрица; действительно,

$$E + A' = U^{-1}(E + A)\,U,$$

и потому

$$\det(E + A') = \det(E + A).$$

Если неисключительная матрица $A$ представлена в виде

$$A = \frac{E - S}{E + S},$$

то сопряженная матрица $A' = U^{-1}AU$ задается равенством

$$A' = \frac{E - S'}{E + S'},$$

где

$$S' = U^{-1}SU \quad \text{и} \quad \det(E + S') = \det(E + S) \neq 0.$$

Для исключительной матрицы $A$ однородные линейные уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik} + a_{ik})\,x_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10.6}$$

имеют ненулевое решение $x_k$. Обозначим линейное подпространство всех векторов $x$, удовлетворяющих этим уравнениям, через $\mathrm{P}^0$. Мы собираемся применить к $\mathrm{P}^0$ следующую лемму:

Лемма (II.10.C). *Пусть* $\mathrm{P}^0$ — *$m$-мерное линейное подпространство пространства* $\mathrm{P}$. *Тогда можно ввести ортогональную систему координат* $e_1, \ldots, e_n$, *первые $m$ фундаментальных векторов которой* $e_1, \ldots, e_m$ *будут лежать в* $\mathrm{P}^0$ (*причем* $\mathrm{P}^0$ *будет натянуто на них*). *Это верно в предположении, что основное поле $k$ вещественно и пифагорово**). *Если $k$ только вещественно, то построение может потребовать нескольких последовательных присоединений квадратных корней из сумм квадратов.*

Доказательство первой части состоит в классическом индуктивном построении декартовой системы координат, возможном в предположении, что поле $k$ вещественно и пифагорово. Если поле не пифагорово, то это построение требует присоединения квадратных корней из сумм квадратов. Остановимся немного на этом процессе.

---

*) См. стр. 27.

Пусть $k$ — заданное вещественное поле и $c$ — число, заданное в $k$ как сумма квадратов,

$$c = c_1^2 + \ldots + c_h^2,$$

но само не являющееся квадратом в $k$. Тогда полином $\gamma^2 - c$ от неизвестной $\gamma$ неприводим над $k$. Поле $(k, \sqrt{c})$, получающееся путем присоединения к $k$ квадратного корня $\sqrt{c}$, состоит из всех $k$-полиномов от неизвестной $\gamma$ по модулю $\gamma^2 - c$, т. е. обращение такого элемента $f(\gamma)$ в нуль означает делимость его на $\gamma^2 - c$. Все элементы поля $(k, \sqrt{c})$ однозначно представимы в форме

$$a + b\gamma \qquad (a, b \in k).$$

Замечание, которое мы хотим здесь сделать, состоит в том, что если $k$ вещественно, то вещественно и $(k, \sqrt{c})$. Другими словами, сравнение

$$(a_1 + b_1\gamma)^2 + \ldots + (a_\nu + b_\nu\gamma)^2 \equiv 0 \pmod{\gamma^2 - c} \tag{10.7}$$

выполняется лишь, если все числа $a_\rho$, $b_\rho$ из $k$ равны нулю. (10.7) эквивалентно следующим двум уравнениям в $k$:

$$(a_1^2 + \ldots + a_\nu^2) + (b_1^2 + \ldots + b_\nu^2)\,c = 0,$$
$$a_1 b_1 + \ldots + a_\nu b_\nu = 0.$$

Первое уравнение можно записать в форме

$$\sum_\rho a_\rho^2 + \sum_{\rho, i} (b_\rho c_i)^2 = 0 \quad (\rho = 1, \ldots, \nu;\ i = 1, \ldots, h).$$

Вследствие вещественности поля $k$ заключаем отсюда, что

$$a_\rho = 0, \qquad b_\rho c_i = 0,$$

т. е., что действительно все $a_\rho$ и $b_\rho$ равны нулю.

Процесс присоединения квадратного корня из суммы квадратов мы назовем *„пифагоровым присоединением"*. Наше замечание обосновывает возможность последовательных пифагоровых присоединений без разрушения нашей конструкции, поскольку в процессе всех этих расширений поле остается вещественным.

Обратимся теперь к обещанному выше применению нашей леммы к $m$-мерному подпространству $P^0$ всех векторов $x$, удовлетворяющих системе (10.6). После введения новой декартовой системы координат, на первые $m$ осей которой $e_1, \ldots, e_m$ натянуто P⁰, наша матрица $A$ принимает вид

$$\begin{Vmatrix} -E_m & * \\ 0 & B \end{Vmatrix},$$

так как система (10.6) имеет теперь решения

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, \ldots, 0 \,|\, 0, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_m = (0, 0, \ldots, 1 \,|\, 0, \ldots, 0). \end{gathered}$$

Сумма квадратов элементов первой строки матрицы $A$ равна 1,

$$(-1)^2 + \sum_{k=m+1}^{n} a_{1k}^2 = 1, \text{ откуда } \sum_{k=m+1}^{n} a_{1k}^2 = 0.$$

В силу вещественности поля это влечет за собой, что все элементы $a_{1k}$ $(k = m+1, \ldots, n)$ равны нулю. То же верно для каждой из первых $m$ строк, так что верхний правый прямоугольник, обозначенный звездочкой, как и нижний левый, заполнен нулями. $\det(E + B)$ не должен равняться нулю, так как иначе система (10.6) имела бы решение

$$(0, \ldots, 0 \,|\, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

лежащее вне P⁰. Поэтому $B$ необходимо является собственно ортогональным преобразованием, и так как $A$ было предположено собственно ортогональным, то определитель нашего $m$-мерного $-E_m$ должен быть равен $+1$; таким образом $m$ должно быть четным: $m = 2p$, $n - 2p = q$. Мы пришли к следующему результату:

При применении к $A$ надлежащего ортогонального преобразования $U$,

$$A = U^{-1} \tilde{A} U,$$

$\tilde{A}$ распадается по формуле

$$\tilde{A} = (-E_{2p}) \dot{+} B,$$

где $B$ — неисключительная собственно ортогональная матрица в $q$-мерном пространстве.

Отсюда легко вытекает

Лемма (II.10.D). *При вещественном основном поле $k$ каждая собственно ортогональная матрица $A$ может быть записана в виде произведения двух перестановочных неисключительных собственно ортогональных матриц $A_1$, $A_2$.*

Доказательство. Примем сначала, что наше поле $k$ вещественно и пифагорово. Применив наше преобразование $U$, положим

$$\begin{gathered}\tilde{A}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \dotplus \ldots \dotplus \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{(p \text{ слагаемых})} \dotplus E_q,\\ \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \dotplus \ldots \dotplus \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \dotplus B;\\ A_1 = U^{-1}\tilde{A}_1 U, \qquad A_2 = U^{-1}\tilde{A}_2 U.\end{gathered}$$

Тогда $A_1, A_2$ будут удовлетворять относительно $A$ всем требуемым условиям, поскольку эти условия выполнены для трансформированных матриц $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ относительно $\tilde{A}$.

Если $k$ вещественно, но не пифагорово, то описанное выше построение проходит после применения надлежащей цепи пифагоровых присоединений, расширяющей $k$ до некоторого также вещественного поля $K$. В силу неравенства

$$\det(E + A_1) \neq 0$$

мы можем, согласно теореме (II.10.B), написать:

$$A_1 = (E - S)(E + S)^{-1}.$$

Косо-симметричная матрица $S = \|s_{ik}\|$ будет перестановочна с $A$, и

$$\det(E + S) = \det(E - S) \neq 0. \tag{10.8}$$

Отметим, между прочим, что $S = U^{-1}\tilde{S}U$, где

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \dotplus \ldots \dotplus \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \dotplus 0_q,$$

и $0_q$ — нулевая матрица $q$-го порядка.

Так как

$$A_2 = A_1^{-1}A = (E + S)(E - S)^{-1}A = (E + S)A(E - S)^{-1},$$

то неравенство $\det(E + A_2) \neq 0$ равносильно неравенству

$$\det\{(E - S) + (E + S)A\} \neq 0. \tag{10.9}$$

Перестановочность с $A$,

$$SA = AS,$$

налагает на $\frac{1}{2}n(n-1)$ неизвестных $s_{ik}$ $(i < k)$ некоторое количество линейных условий. Так как коэффициенты этих уравнений лежат в $k$, то можно найти фундаментальные решения $S^{(1)}, \ldots, S^{(N)}$

в $k$ так, чтобы каждое решение (в $K$ или любом поле над $k$) было линейной их комбинацией:

$$S=\tau_1 S^{(1)}+\ldots+\tau_N S^{(N)}. \tag{10.10}$$

Оба определителя (10.8) и (10.9) после подстановки вместо $S$ выражения (10.10) становятся полиномами от $\tau_1, \ldots, \tau_N$. Они не могут тождественно обращаться в нуль в формальном смысле, поскольку нам известны значения параметров $\tau$ в $K$, при которых оба эти определителя не равны 0. Поэтому мы можем найти такие значения в $k$ или даже рациональные значения, которые ни один из этих определителей не обращают в нуль.

Хотя это завершает доказательство нашей леммы, не бесполезно, пожалуй, немного подробнее рассмотреть обычно встречающийся случай. Перемножив две перестановочные неисключительные собственно ортогональные матрицы

$$A_1=\frac{E-S_1}{E+S_1}, \qquad A_2=\frac{E-S_2}{E+S_2},$$

мы получим в результате

$$A=A_1A_2=\frac{(E-S_1)(E-S_2)}{(E+S_1)(E+S_2)}=\frac{(E+S_1S_2)-(S_1+S_2)}{(E+S_1S_2)+(S_1+S_2)}, \tag{10.11}$$

а это выражение снова имеет тот же вид (10.2), с косо-симметричной матрицей

$$S=\frac{S_1+S_2}{E+S_1S_2}.$$

Мы встретились здесь с тем, что в области скаляров известно под названием закона сложения тангенсов. Полученное правило, конечно, теряет силу, если

$$\det(E+S_1S_2)=0,$$

и этим обстоятельством объясняется бо́льший объем области бинарных произведений (10.11), охватывающей наряду с неисключительными также исключительные преобразования.

## 11. Формальные ортогональные инварианты

Параметризация Кэли сразу показала бы, что собственно ортогональные матрицы образуют рациональное неприводимое алгебраическое многообразие в $n^2$-мерном пространстве всех матриц, — не будь исключительных элементов, не охватываемых параметризацией. Естественно напрашивается предположение, что эти элементы, возможно, не играют роли. Руководствуясь этой надеждой, попробуем воспользоваться следующим модифицированным определением ортогонального инварианта, имеющим то преимущество, что оно носит более формальный алгебраический характер. Рассмотрим произвольную форму $f(x, y, \ldots)$, зависящую от нескольких векторов $x$, $y, \ldots$ в нашем $n$-мерном пространстве и однородную относительно этих аргументов с предписанными степенями $\mu$, $\nu, \ldots$ Произведем над $x$, $y, \ldots$ когредиентно подстановку

$$(E-S)(E+S)^{-1},$$

где $S=\|s_{ik}\|$ — косо-симметричная матрица и $\frac{1}{2}n(n-1)$ величин $s_{ik}$ $(i<k)$ рассматриваются как неизвестные. В результате мы получим рациональную функцию от этих неизвестных, знаменателем которой служит $\det.(E+S)$ в степени $h=\mu+\nu+\ldots$:

$$\frac{f(x, y, \ldots; s_{ik})}{|E+S|^h}.$$

Функция $f$, для которой постулировано тождество

$$f(x, y, \ldots; s_{ik})=|E+S|^h \cdot f(x, y, \ldots)$$

относительно $x$, $y, \ldots$ и $\frac{1}{2}n(n-1)$ переменных $s_{ik}$, называется *формальным ортогональным инвариантом.*

Этот постулат подчиняет коэффициенты функции $f$ некоторому количеству однородных линейных уравнений с рациональными коэффициентами. Поэтому можно найти совокупность линейно независимых базисных инвариантов $f_1, \ldots, f_N$, имеющих предписанные степени и *рациональные коэффициенты*, такую, что каждый инвариант $f$ (над $k$) есть линейная комбинация $a_1 f_1 + \ldots$ $\ldots + a_N f_N$ с постоянными коэффициентами $a$ (из $k$). Теперь, безотносительно к положенному в основу числовому полю $k$ характеристики 0, наша проблема сведена к проблеме, касающейся лишь фундаментального поля $\varkappa$ рациональных чисел.

Главным нашим результатом будет подтверждение теоремы (II.9.A) для *формальных* ортогональных инвариантов. Нам нужно будет просто подправить наше прежнее рассуждение с тем, чтобы устранить препятствия, которые могут представить имеющиеся „исключения“. Лемма (II.10.D) и была придумана для достижения этой цели. Действительно, функция, инвариантная относительно преобразований $A_1$ и $A_2$, инвариантна также относительно $A=A_1A_2$, и таким путем инвариантность можно распространить с неисключительных на *все* ортогональные преобразования. Сделаем несколько предварительных замечаний, которые подготовят нас к выполнению стоящей перед нами задачи.

Введем специальную несобственно ортогональную инволюцию $J_n$:

$$x'_1 = x_1, \ldots, x'_{n-1} = x_{n-1}, \quad x'_n = -x_n. \tag{9.3}$$

Будем называть формальный инвариант $f$ *четным* или *нечетным* сообразно тому, переводит ли $J_n$ функцию $f$ в $f$ или же в $-f$. Преобразование $J_{n-1}$, изменяющее знак лишь $(n-1)$-й переменной, будет оказывать то же действие, поскольку собственно ортогональное преобразование $J_{n-1}J_n$,

$$x'_{n-1} = -x_{n-1}, \quad x'_n = -x_n$$

оставляет $f$ неизменной. Действительно, $J_{n-1}J_n$ есть квадрат неисключительной матрицы

$$(E - S_{n-1,n})(E + S_{n-1,n})^{-1},$$

где $S_{n-1,n}$ обозначает косо-симметричную матрицу, в которой единственными элементами, отличными от нуля, являются

$$s_{n-1,n} = -s_{n,n-1} = 1.$$

Так как $f$ — формальный инвариант, то и форма $f'$, в которую $J_n$ переводит $f$, также есть формальный инвариант: инвариантность $f'$ относительно

$$A = (E - S)(E + S)^{-1}$$

равносильна инвариантности $f$ относительно

$$A' = J_n^{-1}AJ_n = (E - S')(E + S')^{-1} \qquad (S' = J_n^{-1}SJ_n).$$

$f + f'$ четно, $f - f'$ нечетно. Следовательно, каждый формальный инвариант является суммой четного и нечетного инвариантов. Если

$$f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{n-1}\, x_n \\ y_1 \ldots y_{n-1}\, y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix}$$

есть формальный инвариант в $n$-мерном пространстве, то

$$f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{n-1}\, 0 \\ y_1 \ldots y_{n-1}\, 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

есть формальный инвариант в $(n-1)$-мерном пространстве. Сделанное выше замечание о $J_{n-1}$ и $J_n$ показывает, что последний инвариант четен, если четен первый. Если же заданный инвариант $f$ нечетен, то (11.1), очевидно, является нулем, потому что $J_n$ есть тождество в подпространстве $x_n=0$.

Мы теперь уже в состоянии произвести ревизию нашего доказательства в новой, более формальной интерпретации:

Теорема (II.11.A'). *Каждый четный формальный ортогональный инвариант выражается через скалярные произведения его аргументов. Каждый нечетный формальный ортогональный инвариант является суммой членов* $[xy\ldots z]\cdot f^*$, *где* $x, y, \ldots, z$ — *любые* $n$ *из аргументов, а* $f^*$ — *четный формальный ортогональный инвариант.*

Выделяющимся, по сравнению с прежним доказательством, моментом, и притом единственным, апеллирующим к соображению неформального численного характера, является следующий. Пусть $f$ — формальный инвариант, зависящий от $n-1$ аргументов, и пусть

$$\begin{gathered} x=(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots \\ y=(y_1, \ldots, y_n) \end{gathered}$$

— численно заданные рациональные значения его аргументов. Существует перпендикулярный ко всем им отличный от нуля рациональный вектор. Произведя собственно ортогональное преобразование $A$ так, чтобы этот вектор стал $n$-й осью, мы переведем $x, \ldots, y$ в $n-1$ векторов

$$\begin{gathered} x'=(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, 0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'=(y'_1, \ldots, y'_{n-1}, 0), \end{gathered}$$

имеющих последней компонентой 0. Верно ли, что

$$f(x, \ldots, y)=f(x', \ldots, y')? \tag{11.2}$$

Построение матрицы $A$ может потребовать нескольких последовательных пифагоровых присоединений, так что элементы этой матрицы лежат в каком-то вещественном поле $K$ над $\varkappa$. По лемме (II.10.D), $A$ есть произведение $A_1A_2$ двух неисключительных множителей

$$A_1=(E-S_1)(E+S_1)^{-1}, \qquad A_2=(E-S_2)(E+S_2)^{-1},$$

элементы которых также принадлежат $K$. Формальная инвариантность функции $f$ влечет за собой инвариантность относительно $A_1$ и $A_2$, а потому и относительно $A$; тем самым равенство (11.2) действительно верно.

Форма с коэффициентами из поля $k$ характеристики 0, численно инвариантная при неисключительных рациональных собственно ортогональных преобразованиях, очевидно, формально инвариантна. Поэтому мы можем отметить в качестве следствия нашей теоремы тот факт, что инвариантность распространяется с таких частных преобразований на все собственно ортогональные преобразования при каком угодно поле над $\varkappa$.

## 12. Произвольная метрическая основная форма

При достигнутой нами степени общности легко заменить рассматривавшуюся до сих пор сумму квадратов

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \tag{12.1}$$

произвольной невырожденной квадратичной формой

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} g_{ik} x_i x_k \qquad (g_{ki} = g_{ik}). \tag{12.2}$$

Пусть $G = \| g_{ik} \|$ — матрица коэффициентов, взятых из основного поля $k$ характеристики 0. Линейные подстановки $B$ над $k$, оставляющие инвариантной форму (12.2),

$$B^* G B = G, \tag{12.3}$$

образуют группу, ортогональную группу $O_G(n)$ с „основной метрической формой“ (12.2).

Согласно лемме (II.10.A), неисключительное преобразование $B$ этого типа может быть записано в форме

$$B = (E - T)(E + T)^{-1}, \tag{12.4}$$

где $T$ удовлетворяет линейному условию

$$GT + T^* G = 0.$$

Формальная инвариантность определяется в терминах этой параметризации очевидным образом.

После надлежащего присоединения квадратных корней, расширяющего $k$ до некоторого поля $K$ над $k$, новую основную форму (12.2) можно преобразовать в (12.1) посредством некоторой подстановки $H$:

$$G = H^* H.$$

Это осуществляется путем классического индуктивного построения декартовой системы координат, если рассматривать

$$(12.5) \qquad (xy) = \sum g_{ik} x_i y_k$$

как скалярное произведение*). Подстановки $B$ нашей теперешней группы получаются из ортогональных подстановок $A$ трансформированием с помощью $H$:

$$B = H^{-1}AH.$$

Однако это соответствие предполагает, что мы оперируем в расширенном поле $K$.

Представление (10.2) матрицы $A$ приводит к соотношению (12.4) с

$$T = H^{-1}SH,$$

а последнее действительно превращает условие

$$S^* + S = 0 \text{ в } GT + T^*G = 0.$$

Если $f(x, y, \ldots)$ есть формальный инвариант нашей новой группы $O_G(n)$ над $K$, то $f(H^{-1}x, H^{-1}y, \ldots)$ есть формальный ортогональный инвариант над $K$ и потому выражается через компонентные определители и скалярные произведения. Установив это, мы можем в дальнейшем снова ограничиться полем $k$.

Особый интерес для аналитика представляет поле **K** всех вещественных чисел. Метрическая основная форма является тогда невырожденной квадратичной формой с вещественными коэффициентами, не обязательно положительно определенной; таким образом, здесь представляются различные возможности, описываемые сигнатурой формы. Они не причиняют никаких трудностей при исследовании соответствующих инвариантов (группа Лоренца).

## 13. Инфинитезимальная точка зрения

Мы подготовлены теперь к тому, чтобы придать нашему исследованию новый оборот введением идеи инфинитезимальных ортогональных преобразований, и достичь, таким образом, еще

---

*) При этом, однако, первый базисный вектор $e$ следует выбрать так, чтобы $\alpha = (ee) \neq 0$. Тогда каждый вектор $x$ будет допускать единственное разложение

$$x = \xi e + x',$$

где $x'$ лежит в $(n-1)$-мерном пространстве, определяемом уравнением $(ex') = 0$. Квадратным корнем, который надлежит извлечь на этом первом этапе, является корень из $\alpha$ [19].

более сжатой и изящной трактовки инвариантности. Эта идея взошла на почве непрерывных переменных, и чтобы уразуметь ее значение, мы последуем пути исторического развития, приняв сначала за наше основное поле снова континуум всех вещественных чисел. Хотя это и представляется довольно неожиданным, однако тот же метод с некоторыми формально алгебраическими видоизменениями проходит при любом основном поле $k$ характеристики 0.

Возьмем в качестве примера группу $O^{+}(3) = D$ вращений в трехмерном пространстве. Эта группа служит для описания подвижности волчка — твердого тела, одна точка $o$ которого, центр, занимает фиксированное положение в пространстве. Пусть $t_1$, $t_2$ — любые два момента в процессе движения нашего волчка. Та точка волчка, которая занимает в момент $t_1$ положение $p$ в пространстве, будет занимать в момент $t_2$ положение $p'$, и отображение $p \longrightarrow p'$, т. е. смещение, достигнутое в промежуток времени $t_1 t_2$, будет операцией $H(t_1 t_2)$ из нашей группы $D$. „Подвижность“ всегда должна описываться группой; действительно, $H(tt)$ будет тождеством, $H(t_2 t_1)$ обратным по отношению к $H(t_1 t_2)$, и $H(t_1 t_3) = H(t_2 t_3) H(t_1 t_2)$. Материальная субстанция, распределенная в пространстве (или любой его части), движется как твердое тело вокруг $o$, если группой возможных смещений служит наша группа $D$. В этом описании мы сравниваем положения субстанции в два отдельные момента $t_1$, $t_2$, игнорируя проходимые ею промежуточные положения. Более естественным представляется описывать действительное непрерывное движение во времени как такое, при котором положение волчка претерпевает бесконечно малое вращение в течение каждого элемента времени $(t, t + dt)$, так что движение предстает в виде интегралообразной цепи *инфинитезимальных операций* из $D$.

Воспользуемся декартовыми координатами $x_1$, $x_2$, $x_3$ с началом в $o$; $x_1$, $x_2$, $x_3$ суть координаты точки $p$ или компоненты векторного плеча $\mathfrak{r} = \overrightarrow{op}$. Чтобы избежать понятий, дискредитированных историей математики, мы заменим бесконечно малое смещение $(dx_1, dx_2, dx_3)$ скоростью $\dot{\mathfrak{r}}$:

$$\left(\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \ \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt}\right).$$

В каждый момент $t$ мы имеем в пространстве определенное поле скоростей, задающее смещение тела в течение следующего элемента времени $dt$. Так как каждое вращение есть линейное преобразование, то уравнения, определяющие скорость $\dot{\mathfrak{r}}$ в ее зависимости от точки $p$, должны быть линейными и однородными:

$$\dot{x}_i = \sum_k s_{ik} x_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{13.1}$$

Добавочное требование, чтобы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ оставалось инвариантным, приводит к соотношению

$$2\sum_i x_i \dot{x}_i = 0 \quad \text{или} \quad 2\sum_{i,k} s_{ik} x_i x_k = 0.$$

Если мы запишем это уравнение в виде

$$\sum_{i,k} (s_{ik} + s_{ki})\, x_i x_k = 0,$$

то коэффициенты будут симметричными и обращение квадратичной формы в нуль для всех $x$ будет означать обращение в нуль этих коэффициентов:

$$s_{ik} + s_{ki} = 0;$$

таким образом, матрица $\|s_{ik}\|$ косо-симметрична. В трехмерном пространстве мы положим

$$s_{23} = d_1, \qquad s_{31} = d_2, \qquad s_{12} = d_3.$$

Тогда (13.1) превратится в известную кинематическую формулу: $\dot{\mathfrak{x}}$ равно векторному произведению плеча $\mathfrak{x} = \overrightarrow{op}$ на постоянный вектор $\mathfrak{d} = (d_1,\ d_2,\ d_3)$ [постоянный = независящий от $p$]. Если поле скоростей субстанции имеет этот характер в каждый момент, то субстанция движется вокруг $o$ как твердый волчок.

В $n$-мерном эвклидовом пространстве бесконечно малые вращения точно так же описываются уравнениями

$$dx_i = \sum_k s_{ik} x_k \qquad (i,\ k = 1, \ldots, n)$$

с косо-симметричной матрицей $\|s_{ik}\|$.

Аналогичным образом каждая непрерывная группа преобразований будет содержать свои инфинитезимальные элементы, являющиеся бесконечно малыми смещениями поля точек. Они удобно заменяются их полями скоростей. Композиция двух бесконечно малых смещений сводится к сложению их полей скоростей. Поэтому инфинитезимальные элементы группы преобразований образуют линейный пучок; они представляют собой не что иное, как пучок линейных элементов, исходящих из единичного элемента 1 группового многообразия $\gamma$. Каждый элемент группы, по крайней мере каждый элемент, соединяемый с 1 непрерывной дугой, лежащей в $\gamma$, может быть построен из инфинитезимальных элементов путем нанизывания их в интегралообразную цепь. Эта теория сведения непрерывной группы к ее инфинитезимальным элементам, к которой мы вернемся более подробно в разделе В главы VIII, принадлежит норвежскому математику Софусу Ли. Обогатившись его фундаментальной идеей, мы возвращаемся теперь к нашим алгебраическим изысканиям.

Применяя алгебраическое определение производной (глава I, § 1) к рациональной функции $\varphi = \frac{f}{g}$ от одной переменной, находим:

$$\varphi' = \frac{gf' - fg'}{g^2},$$

где штрих обозначает производную. Предполагая полиномы $f$ и $g$ взаимно простыми, заключаем из $\varphi' = 0$ или $gf' - fg' = 0$, что $f' = g' = 0$, так как $f'$ и $g'$ имеют меньшую степень, чем, соответственно, $f$ и $g$; поэтому $f$, $g$ и $\varphi$ — постоянные.

Пусть $F$ — форма предписанных степеней $\mu, \nu, \ldots$ от некоторого числа векторных аргументов $x, y, \ldots$ Подстановка $A$, когредиентно примененная ко всем аргументам, превращает $F$ в новую форму, которую обозначим через $F(A)$. Вводя наряду с $x, y, \ldots$ новые аргументы $dx, dy, \ldots$, мы построим полный дифференциал $dF$ как поляризованную форму

$$dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i + \ldots \tag{13.2}$$

Произведем с помощью заданной матрицы $n$-го порядка $B$ подстановку

$$dx = Bx; \quad dy = By, \quad \ldots;$$

полученная в результате форма $d_B F$ будет иметь относительно всех аргументов те же самые степени, что и $F$. Руководствуясь фактом, что инфинитезимальное ортогональное преобразование задается формулой

$$dx = Sx \qquad (S \text{ косо-симметрична}),$$

принимают следующее определение:

$F$ есть *инфинитезимальный ортогональный инвариант*, если

$$d_S F = 0 \tag{13.3}$$

тождественно для всех косо-симметричных матриц $S = \|s_{ik}\|$

Уравнение (13.3) линейно относительно $\frac{1}{2}n(n-1)$ неизвестных $s_{ik}$ $(i<k)$ и потому содержит $\frac{1}{2}n(n-1)$ однородных линейных уравнений для коэффициентов формы $F$. Связующее звено с нашими предыдущими рассмотрениями доставляет следующая простая

Теорема (II.13.A). *Понятия формального и инфинитезимального ортогональных инвариантов совпадают.*

Докажем сперва, что формальный инвариант является инфинитезимальным. Пусть $S$ — косо-симметричная матрица с рациональными элементами. Образуем, исходя из заданного $F$, разность

$$(13.4)\qquad F\left(\frac{E-\lambda S}{E+\lambda S}\right)-F(E)=\lambda\cdot\frac{\Phi(\lambda)}{|E+\lambda S|^{h}}\qquad (h=\mu+\nu+\ldots),$$

зависящую от параметра $\lambda$. Как показывает равенство

$$\frac{E-\lambda S}{E+\lambda S}-E=\frac{-2\lambda S}{E+\lambda S},$$

„производная“ от $\frac{E-\lambda S}{E+\lambda S}$ при $\lambda=0$ равна $-2S$. Таким образом, числитель $\Phi(\lambda)$ в (13.4) есть полином, принимающий при $\lambda=0$ значение

$$\Phi(0)=-2d_{S}F.$$

Если $F$ — формальный инвариант, то левая часть равенства (13.4) тождественно равна нулю; следовательно, $\Phi(0)=0$, $d_{S}F=0$.

Доказательство обратного утверждения немного сложнее; основным используемым в нем средством является закон композиции (10.11). Имеем:

$$(13.5)\qquad \frac{E-\lambda^{*}S}{E+\lambda^{*}S}=\frac{E-T}{E+T}\cdot\frac{E-\lambda S}{E+\lambda S},$$

где $\lambda$ и $\lambda^{*}$ — два параметра и

$$T=(\lambda^{*}-\lambda)\cdot\frac{S}{E-\lambda\lambda^{*}S^{2}}.$$

Положим

$$(13.6)\qquad F\left(\frac{E-\lambda^{*}S}{E+\lambda^{*}S}\right)-F\left(\frac{E-\lambda S}{E+\lambda S}\right)=\frac{(\lambda^{*}-\lambda)\cdot\Phi(\lambda,\lambda^{*})}{|E+\lambda S|^{h}\,|E+\lambda^{*}S|^{h}},$$

где $\Phi$ — полином. Производной от

$$F\left(\frac{E-\lambda S}{E+\lambda S}\right)=\varphi(\lambda)$$

является по определению

$$(13.7)\qquad \varphi'(\lambda)=\frac{\Phi(\lambda,\lambda)}{|E+\lambda S|^{2h}}.$$

Используя (13.5) и применяя к (13.6) то же рассуждение, что и в первой части доказательства, находим, что (13.7) становится равным $-2dF$, если ввести сперва в (13.2) дифференциалы

$$dx=\frac{S}{E-\lambda^2S^2}x,\quad dy=\frac{S}{E-\lambda^2S^2}y,\ \ldots,$$

а затем вместо $x, y, \ldots$ подставить

$$\frac{E-\lambda S}{E+\lambda S}x,\quad \frac{E-\lambda S}{E+\lambda S}y,\ \ldots$$

Поэтому, если $F$ есть инфинитезимальный инвариант, то получаем

$$\varphi'(\lambda)=0,\qquad \varphi(\lambda)=\text{const.}=\varphi(0).$$

Подстановка значения $\lambda=1$ в тождество

$$F\left(\frac{E-\lambda S}{E+\lambda S}\right)=F$$

показывает, что $F$ инвариантно относительно преобразования $(E-S)(E+S)^{-1}$ в предположении $|E+S|\neq 0$.

## С. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

### 14. Формулировка предложения для унимодулярной группы

В $n$-мерном векторном пространстве типовыми базисными инвариантами относительно группы всех унимодулярных линейных преобразований служат „латинский“ компонентный определитель $[x_1 \ldots x_n]$ $n$ ковариантных („латинских“) векторов $x_i$, „греческий“ компонентный определитель $[\xi_1 \ldots \xi_n]$ $n$ ковариантных („греческих“) векторов $\xi_i$ и смешанное выражение $(\xi x)$, произведение ковариантного вектора $x$ на контравариантный вектор $\xi$. (Нижними индексами мы пользуемся теперь для различения отдельных векторов, поскольку в обозначении векторных компонент нет нужды.) Между этими базисными инвариантами существуют соотношения следующих пяти типов:

$$\text{(I)} \qquad \sum\nolimits_x \pm [x_1x_2 \dots x_n](\xi x_0) = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \sum\nolimits_x \pm [x_1x_2 \dots x_n][x_0y_2 \dots y_n] = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \sum\nolimits_\xi \pm [\xi_1\xi_2 \dots \xi_n](\xi_0 x) = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \sum\nolimits_\xi \pm [\xi_1\xi_2 \dots \xi_n][\xi_0\eta_2 \dots \eta_n] = 0,$$

$$\text{(V)} \qquad [x_1x_2 \dots x_n][\xi_1\xi_2 \dots \xi_n] - \begin{vmatrix} (\xi_1x_1) \dots (\xi_1x_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\xi_nx_1) \dots (\xi_nx_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь латинские буквы обозначают ковариантные векторы, греческие — контравариантные векторы. Знакопеременная сумма $\sum_x \pm$ в (I) и (II), состоящая из $n+1$ членов, относится к последовательности $x_0 \mid x_1 \dots x_n$; то же самое в (III) и (IV) относительно $\xi_0 \mid \xi_1 \dots \xi_n$. Тождества (I) и (II) непосредственно следуют из того, что левая часть их является косо-симметричной полилинейной формой, зависящей от $n+1$ векторов $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Теорема (II.14.A). (Вторая основная теорема для унимодулярной группы.) *Все соотношения между указанными базисными инвариантами являются алгебраическими следствиями соотношений пяти типов* (I) — (V)[20].

В целях точной формулировки второй основной теоремы следует сперва рассматривать величины типа

$$\text{(14.1)} \qquad [x_1 \dots x_n], \qquad [\xi_1 \dots \xi_n], \qquad (\xi x)$$

как независимые переменные („формальная точка зрения"); латинские и греческие „символы" $x$ и $\xi$ лишены здесь какого бы то ни было самостоятельного значения. При этом, однако, предполагается, что выражение типа $[x_1x_2 \dots x_n]$ при перестановке символов $x_i$ превращается в $\pm[x_1x_2 \dots x_n]$ с положительным знаком для четных и отрицательным — для нечетных подстановок; в частности, выражение этого типа, содержащее два тождественных символа, есть нуль. Пусть $F$ — целая рациональная функция от этих переменных, содержащая некоторые латинские *символы* $x_1, x_2, \dots$ и некоторые греческие *символы* $\xi_1, \xi_2, \dots$ Совокупность всех функций $J$, получаемых путем подстановки в левые части соотношений (I) — (V) вместо стоящих там латинских и греческих букв этих символов во всех возможных комбинациях, — разумеется, латинских символов лишь вместо латинских букв и греческих символов лишь вместо греческих букв, — является базисом идеала $\mathfrak{J} = \{J\}$. Возвращаемся теперь к старой точке зрения, заменяя каждый из латинских и греческих символов $x_1, x_2, \ldots; \xi_1, \xi_2, \ldots$ соответственно переменным ковариантным или контравариантным вектором и затем истолковывая символы (14.1) в их старом смысле, как компонентные определители и внутреннее произведение; этот процесс есть то, что я называю подстановкой. Вторая основная теорема утверждает: *Если функция $F$ при подстановке переходит в* 0, *то она принадлежит идеалу* $\mathfrak{J}$.

Наряду с (I) — (V) я буду пользоваться еще следующим типовым выражением, обращающимся при подстановке в нуль:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{vmatrix} (\xi_0 x_0) & (\xi_0 x_1) & \ldots & (\xi_0 x_n) \\ (\xi_1 x_0) & (\xi_1 x_1) & \ldots & (\xi_1 x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\xi_n x_0) & (\xi_n x_1) & \ldots & (\xi_n x_n) \end{vmatrix}.$$

Оно принадлежит идеалу $\mathfrak{J}$; действительно, развертывая этот определитель по первой строке и заменяя определители типа $\det(\xi_i x_k)$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, входящие множителями, соответствующими произведениями типа

$$[x_1 \ldots x_n][\xi_1 \ldots \xi_n]$$

по модулю (V), мы получим (I) (где следует положить $\xi = \xi_0$), умноженное на $[\xi_1 \ldots \xi_n]$.

Без ограничения общности можно предполагать, что функция $F$ однородна по каждому из латинских и греческих символов. Действительно, $F$ можно разложить на такие однородные слагаемые соответственно степеням этих символов, и если $F$ при подстановке обращается в нуль, то то же имеет место и для каждого слагаемого в отдельности. (При подсчете степени одночленного слагаемого функции $F$ следует, конечно, приписывать каждой переменной степень 1 по содержащимся в ней символам и степень 0 — по несодержащимся.) Пусть отдельный член функции $F$ содержит $l$ латинских и $\lambda$ греческих компонентных определителей; тогда полная степень относительно латинских символов минус полная степень относительно греческих будет для этого члена $n(l - \lambda)$. Следовательно, в предположении однородности функции $F$ разность $l - \lambda$ имеет одно и то же значение для всех членов этой функции*). Произведение латинского и гре-

---

*) Ср. стр. 191.

ческого компонентных определителей, $[x_1 \dots x_n]$ и $[\xi_1 \dots \xi_n]$, можно заменить, mod (V), полиномом от переменных типа $(\xi x)$, а именно, определителем из $(\xi_i x_k)$. Поэтому мы можем считать, что функция $F$ содержит либо одни лишь латинские, либо одни лишь греческие компонентные определители, причем каждый ее член — одно и то же их число. Так как наша таблица фундаментальных соотношений симметрична относительно латинских и греческих символов, то мы ограничимся тем случаем, когда $F$ содержит лишь латинские компонентные определители. После этих приготовлений мы можем высказать вторую основную теорему в следующей уточненной форме:

$T_0$. *Если однородная функция $F$, обращающаяся при подстановке в нуль, содержит лишь переменные типа* $(\xi x)$, *то она* $\equiv 0$ *уже по модулю выражений типа* (VI).

$T_x$. *Если, однако, такая функция $F$, кроме переменных типа* $(\xi x)$, *содержит еще латинские компонентные определители, но не содержит греческих, то она* $\equiv 0$ *по модулю выражений типа* (I) *и* (II).

## 15. Формальное сравнение Капелли

Мы имеем в виду применить к однородной функции $F$ тождество Капелли, содержащее $n+1$ латинских аргументов в $n$-мерном пространстве. Однако теперь мы рассматриваем латинские и греческие символы не как векторы, а просто как составные части обозначений (14.1). Поэтому нам следует сперва определить процесс поляризации соответственно этой интерпретации („формальная поляризация“); соотношение Капелли будет тогда выполняться не как равенство, а как сравнение по модулю $\mathfrak{J}$.

Мы принимаем, что поляризация $D = D_{yx}$, где $x$ и $y$ — два латинских символа, удовлетворяет формальным законам (I.1.7). Эти законы показывают, как действует операция $D_{yx}$ на произвольный полином $f$, коль скоро мы знаем, как она действует на его аргументы (14.1). Последнее же определяется следующими правилами:

1) Переменная, символ которой не содержит буквы $x$, переводится операцией $D_{yx}$ в нуль;

2) $D_{yx}[xx_2 \dots x_n] = [yx_2 \dots x_n]$, $D_{yx}(\xi x) = (\xi y)$.

Для доказательства сравнения Капелли мы поступаем совершенно так же, как раньше, различая, однако, с самого начала два случая, соответственно тому, содержит ли наша однородная функция $F$ a) лишь переменные типа $(\xi x)$ или b) также компонентные определители. Вводим символы $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$, не входящие в $F$, и образуем сумму

$$(15.1) \qquad \sum_{x'} \pm D_{x'_n x_n} \dots D_{x'_1 x_1} D_{x'_0 x_0} F,$$

распространенную знакопеременно на $(n+1)!$ перестановок символов $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$. В случае a) это выражение, очевидно, составлено из членов

$$(15.2) \qquad Q \cdot \sum_{x'} \pm (\xi_0 x'_0)(\xi_1 x'_1) \dots (\xi_n x'_n),$$

где $Q$ — одночлен от переменных, входящих в $F$. Поэтому (15.1) сравнимо с 0 по модулю определителей типа (VI). *После* образования суммы (15.1) подставляем $x_0, x_1, \dots, x_n$ вместо $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$. В том, что это приводит к тому же результату, как и в прежней менее формальной интерпретации, убеждаемся тем же самым способом, как и там, используя теперь следующие два факта, заменяющие обычные правила дифференцирования:

$\alpha$) для двух различных символов $x$ и $x'$ имеем

$$D_{yx} \{f(x', x)\}_{x'=x} = \{D_{yx'} f(x', x) + D_{yx} f(x', x)\}_{x'=x};$$

$\beta$) если $f(x')$ линейно относительно $x'$, то $D_{yx'} f(x') = f(y)$.

Согласно правилам (I.1.7) достаточно доказать $\alpha$) для случая, когда $f$ есть одна из переменных. Единственной переменной (14.1), действительно содержащей одновременно оба символа $x$, $x'$, является $[x'xx_3 \dots x_n]$. Левая часть формулы $\alpha$) равна нулю, поскольку $[xxx_3 \dots x_n]$ с двумя одинаковыми $x$ по определению означает 0, правая же часть равна

$$[yxx_3 \dots x_n] + [xyx_3 \dots x_n],$$

что также по определению есть 0.

Таким способом находим, что (15.1) после подстановки первоначальных символов $x_0, x_1, \dots, x_n$ вместо новых $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ переходит в

$$(15.3) \qquad \sum_{x'} \pm (D_{x'_n x_n} + n\delta_{x'_n x_n}) \dots (D_{x'_2 x_2} + 2\delta_{x'_2 x_2}) \times$$
$$\times (D_{x'_1 x_1} + 1 \cdot \delta_{x'_1 x_1}) D_{x'_0 x_0} F.$$

Знакопеременную сумму в (15.3) следует теперь понимать так, что $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$ последовательно заменяются всеми перестановками символов $x_0, x_1, \ldots, x_n$. $\delta_{x'x}$ означает 1 или 0 соответственно совпадению или несовпадению символов $x'$ и $x$. Результат, к которому мы приходим, состоит в том, что (15.3) *сравнимо с 0 по модулю типа* (VI).

В случае $\mathfrak{b}$) поступаем следующим образом. Нам нужно применить (15.3) к одночлену $F$, являющемуся произведением переменных типа $(\xi x)$ и латинских компонентных определителей, причем по крайней мере один из последних действительно содержится в $F$. Распространяя сначала суммирование лишь на перестановки символов $x'_1, \ldots, x'_n$, можно последовательно собрать все символы $x'_1, \ldots, x'_n$ в один компонентный определитель. Это выполняется путем применения тождества (8.4) к двум случаям:

$$L(x) = (\xi x), \qquad L(x) = [x y_2 \ldots y_n],$$

где оно приводится соответственно к (I) и (II). Однако наше преобразование, в результате которого все $n$ символов $x'_1, \ldots, x'_n$ сводятся в один определитель $[x'_1 \ldots x'_n]$, является с „формальной точки зрения“ не тождеством, как это было в § 8, а преобразованием по модулю выражений типов (I) и (II). Отвлекаясь от множителей, не содержащих символов $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$, сумма (15.3) является теперь выражением типа (I) или (II). Таким образом, мы пришли к выводу, что если однородная функция $F$ содержит латинские компонентные определители, то (15.3) сравнимо с 0 по модулю типов (I) и (II).

## 16. Доказательство второй основной теоремы для унимодулярной группы

Если $F$ имеет относительно символов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ степени $r_0, r_1, \ldots, r_n$, то доказанное только что сравнение Капелли можно записать в форме

$$\rho F \equiv \sum \mathcal{P} F^*. \tag{16.1}$$

Здесь

$$\rho = r_0 (r_1 + 1) \ldots (r_n + n),$$

и потому $\rho \neq 0$, если $F$ действительно содержит символ $x_0$. Полином $F^*$ — меньшего ранга чем $F$ и получается из $F$ посредством поляризации; $\mathcal{P}$ есть некоторая последовательность поляризаций.

Мы определили „формальную поляризацию“ так, что безразлично, применяется ли поляризация к заданному $F$ („формально“) до или („не формально“) после подстановки. Поэтому, если $F$ при подстановке обращается в нуль, то то же имеет место и для каждого $G$, полученного поляризацией из $F$, и в частности для форм $F^*$, входящих в (16.1). Выражения (VI), равно как (I) и (II), переходят при поляризации в выражения той же структуры. Следовательно, посредством сравнения (16.1) мы свели справедливость соответственных теорем $T_0$ и $T_x$ для заданного $F$ к справедливости их для формы $F^*$ низшего ранга, пока $F$ действительно содержит символ $x_0$. Начатый так индуктивный процесс закончится полным исключением $x_0$ из $F$. Тот же процесс можно повторять, пока $F$ содержит еще более $n$ латинских символов, приписывая $n+1$ из этих символов роль, которую играли выше $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Этим способом мы, наконец, дойдем до $F$, содержащего не более $n$ латинских символов $x_1, \ldots, x_n$. В случае а) такое $F$ является функцией $n\nu$ переменных вида

$$(\xi_\varkappa x_k) \quad (\varkappa=1, \ldots, \nu;\ k=1, \ldots, n);$$

число $\nu$ ничем не ограничено. Мы докажем теорему $T_0$, показав, что если в случае а) число латинских символов равно $n$, то наше $F$ не может обратиться в нуль после подстановки, не будучи нулем уже до нее.

Это легко сделать, поскольку можно сразу найти $n$ ковариантных векторов $x_1, \ldots, x_n$ и $\nu$ контравариантных векторов $\xi_\varkappa$ так, чтобы внутренние произведения $(\xi_\varkappa x_k)$ оказались равными произвольно предписанным числам $z_{\varkappa k}$. Для этого следует только взять

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ x_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1), \\ \xi_\varkappa &= (z_{\varkappa 1}, z_{\varkappa 2}, z_{\varkappa 3}, \ldots, z_{\varkappa n}). \end{aligned}$$

В случае b) однородная функция $F$, содержащая не более $n$ латинских символов, необходимо имеет вид

$$[x_1 x_2 \ldots x_n]^f \cdot G\,\{(\xi_\varkappa x_k)\},$$

где второй множитель $G$ зависит снова от одних лишь переменных типа $(\xi_\varkappa x_k)$. $F$ не может содержать более одного такого члена, поскольку показатель $l$ фиксирован разностью между полными степенями $F$ относительно латинских и греческих символов. Поэтому и здесь снова верно, что $F$ может обратиться в нуль после подстановки, лишь будучи нулем уже до нее; действительно, обращение $F$ в нуль после подстановки имеет своим следствием то же для $G$.

## 17. Вторая основная теорема для ортогональной группы

Если $\Gamma$ — группа $O(n)$ всех собственно и несобственно ортогональных преобразований, то имеется только один тип базисного инварианта, а именно скалярное произведение $(xy)$. Типовым соотношением между скалярными произведениями является следующее, содержащее $n+1$ векторов $x$ и $n+1$ векторов $y$:

$$J=\begin{vmatrix} (x_0y_0) & (x_0y_1) & \ldots & (x_0y_n) \\ (x_1y_0) & (x_1y_1) & \ldots & (x_1y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_ny_0) & (x_ny_1) & \ldots & (x_ny_n) \end{vmatrix}=0.$$

Теорема (II.17.A). (Вторая основная теорема для ортогональной группы.) *Каждое соотношение между скалярными произведениями является алгебраическим следствием соотношений типа $J$.*

При заданных $m$ латинских „символах“ $x_1, \ldots, x_m$ „соотношение“ есть полином от $\frac{1}{2}m(m+1)$ переменных $(x_\alpha x_\beta)$, обращающийся в нуль при замене символов $x_1, \ldots, x_m$ произвольными векторами, а переменных $(x_\alpha x_\beta)$ — скалярными произведениями соответствующих пар векторов $x_\alpha$, $x_\beta$ („подстановка“). Мы условливаемся и с формальной точки зрения рассматривать $(x_\alpha x_\beta)$ и $(x_\beta x_\alpha)$ как одну и ту же переменную. При замене „букв“ $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в выражении $J$ любыми из „символов“ $x$ необходимо позволить заменять букву $y$ тем же символом $x_\alpha$, что и букву $x$; однако, заменять различные буквы $x$ (или $y$) одним и тем же символом $x_\alpha$ бесполезно, поскольку все выражение $J$ косо-симметрично относительно $x$-ов (и $y$-ов). Выражения, получающиеся из $J$ описанными заменами букв $x$ и $y$ символами $x_\alpha$ во всех возможных комбинациях, образуют базис идеала $\mathfrak{J}$, и в точной формулировке вторая основная теорема утверждает, что *каждое соотношение $R$ сравнимо с 0 по модулю $\mathfrak{J}$.*

Доказательство снова проводится с помощью сравнения Капелли. Формальное определение поляризации $D = D_{yx}$ здесь таково: $D(uv) = 0$, если ни $u$, ни $v$ не равны $x$; $D(xu) = (yu)$, если $u$ отлично от $x$; $D(xx) = 2(xy)$. Правила $\alpha$) и $\beta$) § 15 остаются в силе; $\alpha$) достаточно сохранить лишь для случая $f(x', x) = (x'x)$. Образуя (15.1), мы получим некоторую совокупность членов, устроенных совершенно аналогично с (15.2):

$$(17.1) \qquad Q \cdot \sum\nolimits_{x'} \pm (x_0'y_0)(x_1'y_1) \ldots (x_n'y_n);$$

но как раз эти члены $\equiv 0$ по модулю определенного выше идеала $\mathfrak{J}$. Однако, это — не единственная могущая теперь представиться возможность. Предположим, что некоторый член выражения $F$ содержит, например, множитель $(x_0x_1)$ и что первая поляризация $D_{x_0'x_0}$ производится над этим множителем; он переходит тогда в $(x_0'x_1)$. Вторая поляризация $D_{x_1'x_1}$, произведенная над этим множителем в его новой форме, превратит его в $(x_0'x_1')$. Поэтому следовало бы считаться с возможностью, что вместо знакопеременной суммы в (17.1) могла бы появиться другая, общий член которой, наряду с переменными типа $(x_0'y_0)$, содержит также переменные типа $(x_0'x_1')$, объединяющие пару новых символов $x'$. Но тогда $\sum_{x'}$ в силу условия $(xy) = (yx)$ определенно будет равно 0. Следовательно, сравнение Капелли оказывается справедливым по модулю введенного здесь идеала, базис которого состоит лишь из выражений типа $J$.

Применяя это сравнение, можно постепенно довести число переменных до $n$. Для завершения доказательства мы должны показать, что полином $F$ от $\frac{1}{2}n(n+1)$ переменных

$$(17.2) \qquad (x_\alpha x_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

будет нулем до подстановки, если он обращается в нуль после подстановки. В § 2 мы упомянули доказательство этого, основанное на том факте, что (над полем K вещественных чисел) векторы $x_\alpha$ можно определить так, чтобы скалярные произведения (17.2) образовывали произвольно предписанную симметричную матрицу, в предположении, что квадратичная форма с этой матрицей коэффициентов является положительно определенной.

Здесь мы предпочтем вместо этого дать прямое алгебраическое доказательство, основанное на индукции от $n-1$ к $n$ и сохраняющее силу при любом основном поле. Для этой цели мы воспользуемся следующими двумя простыми леммами об обращении полиномов в нуль:

1) Полином $\varphi(t)$ от переменной $t$ тождественно равен нулю, если $\varphi(t+a)=0$, где $a$ — фиксированное число кольца, из которого взяты коэффициенты полинома $\varphi$.

2) Полином $\varphi(t_1, \dots, t_h)$ от $h$ переменных $t$ тождественно равен нулю, если тождественно равен нулю как полином от переменных $t$ полином $\varphi(t'_1, \dots, t'_h)$, где $t'_h$ связаны с переменными $t_i$ невырожденным линейным преобразованием

$$t' = \sum_{k=1}^{h} a_{ik} t_k, \qquad \det a_{ik} \neq 0.$$

Предположим $x_1, \dots, x_{n-1}$ численно заданными и линейно независимыми векторами в подпространстве $P_{n-1}$ всех векторов, у которых последняя компонента равна нулю. Тогда эти $n-1$ векторов

$$x_i = (a_{i1}, \dots, a_{i,n-1}) \qquad (i=1, \dots, n-1) \tag{17.3}$$

из $P_{n-1}$ будут иметь определитель $\Delta \neq 0$. Будем рассматривать остающийся вектор

$$x = x_n = (t_1, \dots, t_{n-1}, t)$$

как переменную. Тогда (после подстановки)

$$(xx_i) = \sum_k a_{ik} t_k \qquad (i=1, \dots, n-1),$$

$$(xx) = t^2 + (t_1^2 + \dots + t_{n-1}^2).$$

Выполним теперь „частичную подстановку“, заменив переменные

$$(x_\alpha x_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, n-1) \tag{17.4}$$

скалярными произведениями $n-1$ постоянных векторов (17.3). Заданный полином $F$, зависящий теперь от переменных $(xx)$ и $(xx_i)$, можно рассматривать как полином от $(xx)$ с коэффициентами из кольца полиномов от переменных $(xx_i)$:

$$F = \sum_l (xx)^l \varphi_l((xx_1), \dots, (xx_{n-1})). \tag{17.5}$$

Полагая

$$t_1^2 + \dots + t_{n-1}^2 = a,$$

$$\varphi_l\Big(\sum_k a_{ik} t_k\Big) = \varphi_l^*(t_1, \dots, t_{n-1})$$

и принимая во внимание, что $F$ после подстановки обращается в нуль, имеем

$$\sum_l (t^2+\alpha)^l \varphi_l^*(t_1, \ldots, t_{n-1}) = 0.$$

Поэтому

$$F^*(s+\alpha) = 0 \tag{17.6}$$

тождественно по переменной $s$, где

$$F^*(s) = \sum_l s^l \varphi_l^*(t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Обращение в нуль полинома $F^*(s)$ следует теперь из (17.6) по первой лемме, а обращение в нуль всех его коэффициентов $\varphi_l^*(t_1, \ldots, t_{n-1})$ влечет за собой обращение в нуль полиномов $\varphi_l(t_1, \ldots, t_{n-1})$ тождественно относительно переменных $t$ — по второй лемме.

Коэффициентами полинома $F$ от $(x_1x_n), \ldots, (x_{n-1}x_n), (x_nx_n)$ служат полиномы $f$ от выражений (17.4). Относительно каждого такого коэффициента $f$ мы видели, что он обращается в нуль при подстановке вместо $(x_\alpha x_\beta)$ скалярных произведений $n-1$ векторов $x_\alpha$ пространства $P_{n-1}$, имеющих определитель $\Delta \neq 0$. Ограничение, накладываемое этим алгебраическим неравенством, несущественно. Предполагая доказываемое предложение справедливым в $P_{n-1}$, мы вправе из обращения в нуль коэффициентов $f$ после подстановки заключить, что они равны нулю и до подстановки. Это завершает доказательство, приводя к формальному тождеству $F=0$.

Во вторую очередь рассмотрим группу $O^+(n)$ всех собственно ортогональных преобразований. К типовому инварианту $(xy)$ надлежит теперь присоединить, в качестве дополнительного фундаментального инварианта, компонентный определитель $[x_1 \ldots x_n]$, а к соотношениям типа $J=J_1$ — соотношения еще следующих двух типов:

$$J_2 = [x_1 \ldots x_n][y_1 \ldots y_n] - \begin{vmatrix} (x_1y_1) \ldots (x_1y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (x_ny_1) \ldots (x_ny_n) \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \sum_x \pm [x_1 \ldots x_n](x_0y).$$

Вторая основная теорема утверждает, что этот перечень типовых соотношений для группы $O^+(n)$ является исчерпывающим.

Доказательство. Прежде всего заданное соотношение $R$ можно привести по модулю типа $J_2$ к виду, не содержащему никаких произведений двух компонентных определителей, т. е.

$$R \equiv F + G,$$

где $F$ есть функция от

$$(x_\alpha x_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n),$$

а $G$ — линейная комбинация членов вида

$$[x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_n}] \cdot F^* \{(x_\alpha x_\beta)\}.$$

С помощью несобственно ортогонального преобразования, например посредством изменения знака $n$-й компоненты у всех $m$ векторов, сразу убеждаемся в том, что $F$ и $G$ сами являются соотношениями. Тогда доказательство, только что проведенное нами для полной ортогональной группы,. показывает, что до подстановки $F$ должно быть сравнимо с 0 по модулю типа $J_1$. То же самое рассмотрение, что и проведенное в § 16 для случая присутствия компонентных определителей, показывает здесь, что для $G$ имеет место сравнение Капелли по модулю типа $J_3$. Соотношение (II), входящее там наряду с (I), здесь не появляется, поскольку каждый член суммы $G$ содержит множителем только один компонентный определитель. С помощью сравнения Капелли общее $G$ сводится к $G$, содержащему не более $n$ латинских символов $x_1, \ldots, x_n$:

$$G = [x_1 \ldots x_n] \cdot F^* \{(x_\alpha x_\beta)\}.$$

Если $G$ — соотношение, то то же верно и для $F^*$; но мы видели, что в таком случае $F^*$, а потому и $G$, должно до подстановки обращаться в нуль.

# ГЛАВА III

# МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ И ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА

## А. ТЕОРИЯ ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР

### 1. Основные понятия, относящиеся к матричным алгебрам. Лемма Шура

При рассмотрении какого-либо множества $\mathfrak{A}$ матриц $A$ над $k$ естественно ввести его *линейную оболочку* $[\mathfrak{A}]$ над $k$, состоящую из всех конечных линейных комбинаций

$$a_1A_1 + \ldots + a_rA_r$$

матриц $A_i$ из $\mathfrak{A}$ с коэффициентами $a_i$ из $k$. Абстрактно говоря, линейная оболочка есть линейная совокупность (или векторное пространство) определенного ранга $h$; $h$ означает максимальное число матриц из $\mathfrak{A}$, линейно независимых над $k$. Если некоторое подпространство $n$-мерного векторного пространства P (над $k$), подвергающегося действию матриц $A$, инвариантно относительно множества $\mathfrak{A}$, то оно инвариантно и относительно $[\mathfrak{A}]$; поэтому во всех рассмотрениях, относящихся к инвариантным подпространствам и приведению, можно с удобством заменять $\mathfrak{A}$ его линейной оболочкой $[\mathfrak{A}]$. Если $\mathfrak{A}$ — группа, то $[\mathfrak{A}]$ будет замкнуто относительно следующих трех операций: сложения двух матриц, умножения матрицы на число из $k$ и умножения двух матриц. Такая совокупность называется (матричной) *алгеброй над $k$*, а $[\mathfrak{A}]$ — *обертывающей алгеброй* группы $\mathfrak{A}$. Наше утверждение остается в силе и тогда, когда $\mathfrak{A}$ есть лишь *полугруппа*; под этим мы понимаем совокупность матриц, замкнутую относительно умножения (отбрасывая дополнительные предположения, характерные для собственно группы, а именно, что она содержит единичную матрицу, что каждая из ее матриц — неособенная и что $A^{-1}$ входит в группу вместе с $A$). Отправляясь от произвольной совокупности $\mathfrak{A}$ матриц, мы можем сперва образовать ее мультипликативное замыкание, состоящее из всех конечных произведений $\prod A, A \in \mathfrak{A}$, и являющееся полугруппой, а затем перейти к его линейной оболочке: в результате этих двух шагов мы придем к обертывающей алгебре совокупности $\mathfrak{A}$.

Совершенно так же, как и при переходе от группы (линейных) преобразований к абстрактной групповой схеме, можно игнорировать природу элементов, составляющих матричную алгебру, и фиксировать наше внимание исключительно на производимых над ними операциях. Тогда (*абстрактная*) *алгебра* $\mathfrak{a}$ *над* $k$ выступает как совокупность элементов $a$, для которых определены три операции: сложение $a+b$ и умножение $ab$ двух элементов $a$, $b$, а также умножение $\lambda a$ элемента $a$ на число $\lambda$ из $k$. Но на протяжении этой книги мы будем рассматривать как основной наш объект матричные алгебры; абстрактные схемы будут лишь средством, облегчающим их изучение. Мы условимся применять замену прописных букв соответственными строчными: как $A$ на $a$, $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{a}$, для указания перехода от матриц к абстрактным элементам. Обратно, матричная алгебра $\mathfrak{A}$ является *точным представлением* $a \longrightarrow A$ абстрактной алгебры $\mathfrak{a}$. *$k$-представлением степени $n$ алгебры* $\mathfrak{a}$ называется любое соответствие $a \longrightarrow R(a)$, сопоставляющее элементам $a$ заданной абстрактной алгебры $\mathfrak{a}$ матрицы $n$-го порядка $R(a)$ и сохраняющее основные операции:

$$R(a+b)=R(a)+R(b), \quad R(\lambda a)=\lambda R(a), \quad R(ab)=R(a)R(b)$$
$$(a,\ b — \text{элементы из } \mathfrak{a},\ \lambda — \text{число из } k).$$

Представление является *точным*, если различные элементы $a$ представляются различными матрицами $R(a)$. Определяющие операции алгебры $\mathfrak{a}$ подчиняются следующим законам, где $a$, $b$, $c$ обозначают произвольные элементы из $\mathfrak{a}$, а $\lambda$ — произвольное число из $k$:

(1) Все аксиомы, характеризующие векторное пространство над $k$ (конечной размерности $h$).

(2) Закон дистрибутивности по обоим множителям,

$$(a+b)c=(ac)+(bc), \qquad c(a+b)=(ca)+(cb),$$

дополненный соотношениями

$$\lambda a \cdot c=\lambda(ac), \qquad c \cdot \lambda a=\lambda(ca).$$

(3) Закон ассоциативности

$$(ab)c=a(bc).$$

Мы говорим, что алгебра содержит *единицу* $e$, если имеется элемент $e$, удовлетворяющий соотношениям

$$ae=ea=a$$

для всех элементов $a$ (единица определена тогда однозначно). Алгебра $\mathfrak{a}$, содержащая единицу, называется *алгеброй с делением*, если каждый элемент $a \neq 0$ обладает обратным $a^{-1}$:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$$

Если, кроме того, умножение коммутативно, то алгебра с делением будет полем, конечным над $k$.

Как и в случае групп, мы можем каждому элементу $a$ из $\mathfrak{a}$ поставить в соответствие линейное преобразование

$$(a)\colon\ x \longrightarrow x' = ax,$$

применяемое к переменному элементу $x$ из $\mathfrak{a}$. Алгебра $\mathfrak{a}$ ранга $h$ выступает здесь в двух ролях: 1) как совокупность элементов $a$, которым соответствуют преобразования $(a)$, 2) как $h$-мерное векторное пространство $\rho$, подвергаемое этим преобразованиям. Соответствие $(\mathfrak{a})$: $a \longrightarrow (a)$ определяет представление, так называемое *регулярное представление*, так как

$$b\,(ax) = (ba)\,x;$$

степень регулярного представления есть ранг алгебры. С алгебрами дело обстоит значительно благополучнее, чем с группами, поскольку описанный способ дает настоящее представление *линейными* преобразованиями, а не только лишь реализацию посредством каких-то преобразований в общем неопределенном функциональном смысле. Регулярное представление будет точным, если алгебра $\mathfrak{a}$ содержит единицу $e$ или, более обще, если 0 является единственным элементом $a$, удовлетворяющим соотношению $ax = 0$ для всех элементов $x$.

Матрица $A$, перестановочная с каждым членом $L$ заданного множества матриц $\mathfrak{L}$,

$$AL = LA,$$

называется *коммутатором* этого множества $\mathfrak{L}$. Коммутаторы множества $\mathfrak{L}$ над $k$ образуют $k$-алгебру матриц $\mathfrak{A}$, *коммутаторную алгебру* множества $\mathfrak{L}$ над $k$. Действительно, из

$$A_1L = LA_1, \qquad A_2L = LA_2$$

следует

$$(A_1 + A_2)\,L = L\,(A_1 + A_2), \qquad (A_2A_1)\,L = L\,(A_2A_1)$$

и

$$\text{из } AL = LA \text{ следует } \lambda A \cdot L = L \cdot \lambda A$$

($\lambda$ — число из $k$). В доказательстве нуждается лишь второе из этих следствий; имеем:

$$(A_2A_1)L = A_2(A_1L) = A_2(LA_1) = (A_2L)A_1 = (LA_2)A_1 = L(A_2A_1).$$

$E$ — всегда коммутатор; и если неособенная матрица $A$ есть коммутатор, то коммутатором является и $A^{-1}$; действительно, равенство $AL = LA$ можно переписать в виде $LA^{-1} = A^{-1}L$. И. Шуру [1] принадлежит следующее предложение первостепенной важности:

Лемма (III.1.А). *Если множество $\mathfrak{L}$ неприводимо над $k$, то каждый коммутатор этого множества либо равен нулю, либо является неособенной матрицей; иными словами, коммутаторная алгебра $\mathfrak{A}$ множества $\mathfrak{L}$ есть алгебра с делением.*

Доказательство. Линейное преобразование $\mathfrak{x}' = A\mathfrak{x}$ отображает наше векторное пространство P на подпространство P′, совокупность всех векторов-образов $\mathfrak{x}'$. Вследствие предположенной перестановочности матрицы $A$ со всеми элементами $L$ множества $\mathfrak{L}$, для всякого такого $L$ из $\mathfrak{y} = L\mathfrak{x}$ следует $\mathfrak{y}' = L\mathfrak{x}'$. Поэтому P′ инвариантно относительно $\mathfrak{L}$ и, согласно дополнительному предположению о неприводимости множества $\mathfrak{L}$, есть либо нуль, либо все пространство P. В первом случае $A = 0$, во втором $A$ — неособенная матрица.

Понятие коммутаторов и эта лемма имеют прямое отношение к проблеме *ковариантов* заданного типа $\mathfrak{G}$, рассматривавшейся в конце главы I. Предположим $\mathfrak{G}$ неприводимым, так что наши коварианты $f = (f_1, \ldots, f_n)$ являются примитивными величинами. Компоненты их суть формы предписанных степеней $\mu, \nu, \ldots$ относительно каких-то аргументов — величин $x, y, \ldots$ Все такие формы образуют линейную совокупность — векторное пространство $\Phi_N$, размерность которого $N$ определяется формулой (I.5.4). Первое наше замечание заключается в том, что компоненты $f_1, \ldots, f_n$ либо все равны нулю, либо линейно независимы. Действительно, системы из $n$ коэфициентов $(a_1, \ldots, a_n)$, дающих тождественные соотношения

$$a_1f_1 + \ldots + a_nf_n = 0,$$

образуют векторное пространство, инвариантное относительно представления, контрагредиентного к $\mathfrak{G}$, т. е., вследствие неприводимости $\mathfrak{G}$, — либо все пространство ($f_i = 0$), либо нулевое пространство ($f_i$ линейно независимы). Если мы имеем несколько ковариантов типа $\mathfrak{G}$,

$$f=(f_1,\ldots,f_n);\quad f'=(f'_1,\ldots,f'_n),\quad \ldots;$$

то на $n$ компонент каждого из этих ковариантов натянуто $n$-мерное подпространство $\mathrm{P}$, $\mathrm{P}'$, ... пространства $\Phi_N$. Пространство $\mathrm{P}^{(j)}$ из этой последовательности либо целиком содержится в сумме предшествующих ему $\mathrm{P}+\mathrm{P}'+\ldots+\mathrm{P}^{(j-1)}$, либо линейно независимо от них. Это устанавливается стандартным рассуждением, которое неоднократно будет применяться в дальнейшем: пересечение пространства $\mathrm{P}^{(j)}$ с указанной суммой инвариантно и, следовательно, в силу неприводимости $\mathfrak{G}$, есть либо нуль, либо все $\mathrm{P}^{(j)}$. Поэтому можно определить полную совокупность инвариантов типа $\mathfrak{G}$,

$$f'=(f'_1,\ldots,f'_n),\quad \ldots,\quad f^{(\tau)}=(f^{(\tau)}_1,\ldots,f^{(\tau)}_n),$$

так, что все $n\tau$ компонент

$$f_i^{(\alpha)}\qquad (i=1,\ldots,n;\ \alpha=1,\ldots,\tau)$$

будут линейно независимы, компоненты же любого коварианта $f=(f_1,\ldots,f_n)$ типа $\mathfrak{G}$ будут линейными их комбинациями:

$$f=A'f'+A''f''+\ldots$$

Вытекающее отсюда равенство

$$sf=A'(sf')+A''(sf'')+\ldots$$

в менее абстрактной форме записывается так:

$$Sf=A'(Sf')+A''(Sf'')+\ldots,$$

где $S$ — соответствующая $s$ матрица из $\mathfrak{G}$. Таким образом,

$$S(A'f'+A''f''+\ldots)=A'(Sf')+A''(Sf'')+\ldots,$$

откуда, в силу линейной независимости всех $f_i^{(\alpha)}$,

$$SA'=A'S,\quad SA''=A''S,\quad \ldots$$

Иными словами, матрицы $A'$, $A''$, ... лежат в коммутаторной алгебре $\mathfrak{A}$ неприводимой совокупности $\mathfrak{G}$, и каждая из них есть либо нуль, либо неособенная матрица. Более симметричная формулировка этого результата такова:

Теорема (III.1.B). *Если $f'$, $f''$, ..., $f^{(\tau)}$ — заданные коварианты неприводимого типа $\mathfrak{G}$, то либо $n\tau$ их компонент* *не связаны никаким линейным соотношением, либо мы имеем соотношение*

$$A'f' + A''f'' + \ldots + A^{(\tau)}f^{(\tau)} = 0,$$

*где матрицы* $A$ *принадлежат коммутаторной алгебре совокупности* $\mathfrak{G}$ *и по крайней мере одна из них не равна* 0.

Особенно просто обстоит дело, если основное поле $k$ *алгебраически замкнуто*, т. е. если каждый $k$-полином

$$\varphi(x) = x^m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \beta_m$$

степени $m \geqslant 1$ от одного неизвестного имеет в $k$ корень $\alpha$ и потому распадается на $m$ линейных множителей $(x - \alpha_1) \ldots \ldots (x - \alpha_m)$. Так называемая основная теорема алгебры утверждает, что область обычных комплексных чисел алгебраически замкнута. При таком поле $k$ лемма Шура принимает более простой вид:

Лемма (III.1.C). *Единственными коммутаторами* $A$ $k$*-неприводимого множества матриц* $\mathfrak{L}$ *над алгебраически замкнутым полем* $k$ *являются численные кратные* $\alpha E$ *единичной матрицы.*

Действительно, каково бы ни было число $\alpha$, $\alpha E - A$ будет коммутатором вместе с $A$. Если взять в качестве $\alpha$ корень характеристического уравнения

$$\det(\alpha E - A) = 0,$$

то этот коммутатор будет особенным и значит, по лемме Шура, будет равен 0.

Отсюда следует, что при алгебраически замкнутом поле $k$ либо все компоненты нескольких ковариантов $f', f'', \ldots$ одного и того же примитивного типа $\mathfrak{G}$ линейно независимы, либо имеется нетривиальное соотношение вида

$$\alpha' f' + \alpha'' f'' + \ldots = 0.$$

Другими словами, либо одновременно выполняется $n$ соотношений

$$\alpha' f'_i + \alpha'' f''_i + \ldots = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

либо между компонентами $f'_i, f''_i, \ldots$ нет никакого соотношения вообще (разумеется, исключая в обоих случаях тривиальное соотношение, все коэффициенты которого равны нулю). Эти рассмотрения, очевидно, являются существенным дополнением к общему понятию ковариантa.

Существует еще один вариант леммы Шура, относящийся к двум неэквивалентным неприводимым множествам матриц $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$. Мы снова оперируем в произвольном поле $k$. Для того чтобы наиболее общим способом установить то соответствие между двумя множествами матриц, на которое опирается понятие эквивалентности, мы предположим, что нам дано произвольное множество $\mathfrak{a}$ элементов $a$ и что каждому $a$ соответствует матрица $A_1(a)$ порядка $n_1$ и, кроме того, матрица $A_2(a)$ порядка $n_2$. Эквивалентность имеет место, если порядки равны, $n_1 = n_2$, и если существует неособенная матрица $B$ такая, что

$$B^{-1}A_1(a)B = A_2(a) \quad \text{или} \quad A_1(a) = BA_2(a)B^{-1}$$

для всех $a$ из $\mathfrak{a}$.

Лемма (III.1.D). *Если множества $A_1(a)$, $A_2(a)$ неприводимы и не эквивалентны, то не существует никакой матрицы $B$ (из $n_1$ строк и $n_2$ столбцов), кроме $B = 0$, для которой бы*

$$A_1(a)B = BA_2(a)$$

*тождественно относительно $a$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{P}_1$ и $\mathrm{P}_2$ — векторные пространства, подвергаемые, соответственно, преобразованиям $A_1(a)$ и $A_2(a)$. Матрицу $B$ можно истолковать как линейное отображение $x_1 = Bx_2$ пространства $\mathrm{P}_2$ в $\mathrm{P}_1$. Линейное подпространство пространства $\mathrm{P}_1$, состоящее из всех векторов $x_1$ вида $Bx_2$, инвариантно, так как $A_1(a)x_1 = Bx_2'$, где $x_2' = A_2(a)x_2$. В силу предположенной неприводимости пространства $\mathrm{P}_1$ имеются лишь две возможности: либо $Bx_2 = 0$ для всех $x_2$ из $\mathrm{P}_2$, т. е. $B = 0$, либо $\mathrm{P}_2$ отображается с помощью $B$ на все пространство $\mathrm{P}_1$. С другой стороны, совокупность всех векторов $x_2$ из $\mathrm{P}_2$, для которых $Bx_2 = 0$, является инвариантным подпространством в $\mathrm{P}_2$, так как $BA_2(a)x_2 = A_1(a)Bx_2 = 0$. Из неприводимости $\mathrm{P}_2$ заключаем: либо $Bx_2 = 0$ для всех $x_2$ из $\mathrm{P}_2$, т. е. $B = 0$, либо $x_2 = 0$ является в $\mathrm{P}_2$ единственным вектором, для которого $Bx_2 = 0$, так что различные векторы из $\mathrm{P}_2$ переходят при отображении $B$ в различные векторы из $\mathrm{P}_1$. Поэтому, если $B \neq 0$, заключаем, что $B$ определяет взаимно однозначное линейное отображение пространства $\mathrm{P}_2$ на $\mathrm{P}_1$. Но это означает, что $B$ есть неособенная квадратная матрица ($n_1 = n_2$) и значит $A_1(a)$ и $A_2(a)$ эквивалентны, что, однако, противоречит предположению.

Пусть теперь

$$\mathfrak{G}\colon f, f', f'', \ldots; \qquad \mathfrak{H}\colon g', g'', \ldots;$$

будут несколько множеств ковариантов, заданных, выписанных перед ними, неприводимых и неэквивалентных типов $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$, ..., и предположим снова, что, за пропуском $f$, все компоненты ковариантов $f', f'', \ldots; g', g'', \ldots; \ldots$ линейно независимы. Здесь опять имеются лишь две возможности: либо каждая компонента коварианта $f$ является линейной комбинацией компонент остальных ковариантов, либо таблица компонент даже после присоединения $f$ состоит из независимых членов. В первом случае мы будем иметь соотношение вида

$$f = (A'f' + A''f'' + \ldots) + (B'g' + B''g'' + \ldots).$$

Если

$$s \to S(s) \in \mathfrak{S}, \quad s \to T(s) \in \mathfrak{H}, \quad \ldots,$$

то получаем

$$S(s)A' = A'S(s), \ldots; \quad S(s)B' = B'T(s), \ldots; \quad \ldots$$

Поэтому $A'$, $A''$, ... принадлежат коммутаторной алгебре множества $\mathfrak{S}$, тогда как $B'$, $B''$, ...; ..., согласно нашей новой лемме (III.1.D), все суть нули. Полученный результат можно сформулировать более симметричным образом:

Теорема (III.1.E). *Если $f', f'', \ldots; g', g'', \ldots; \ldots$ суть множества ковариантов заданных неприводимых и не эквивалентных типов $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$, ..., то либо их компоненты линейно независимы, либо по крайней мере одно из этих множеств, скажем, первое, $\mathfrak{S}$: $f', f''$, ..., связано соотношением*

$$A'f' + A''f'' + \ldots = 0,$$

*где $A', A'', \ldots$ — коммутаторы множества $\mathfrak{S}$, один из которых не равен* 0.

## 2. Предварительные сведения

Мы приступим теперь к более основательному исследованию *структуры матричных алгебр*. С каждой такой алгеброй $\mathfrak{A}$ дается ее коммутаторная алгебра $\mathfrak{B}$, и одновременное рассмотрение $\mathfrak{A}$ с $\mathfrak{B}$ проливает больше света на строение алгебры $\mathfrak{A}$.

Несколько подготовительных замечаний, относящихся главным образом к „вырождению“, расчистят нам путь. Мы все время оперируем в заданном поле $k$, и такие термины, как матрица, векторное пространство, алгебра, неприводимость, подразумеваются все „над $k$“. Заданное множество $\mathfrak{A}$ матриц $A$ может проявлять *вырождение* двоякого рода:

1) Все матрицы $A$ отображают векторное пространство $\mathrm{P}$ в одно и то же собственное подпространство $\mathrm{P}'$, т. е. все образы $A\mathfrak{x}$ ($A \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{x} \in \mathrm{P}$) лежат в $\mathrm{P}'$: *выраждение первого рода*;

2) существуют векторы, неравные 0, переводимые всеми преобразованиями $A$ из $\mathfrak{A}$ в нуль: *вырождение второго рода*.

Если множество матриц $\mathfrak{A} = \{A\}$ проявляет вырождение первого рода, то множество $\mathfrak{A}^*$ транспонированных матриц $A^*$ страдает второй болезнью, и обратно; действительно, наше предположение означает, что все векторы $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ вида $A\mathfrak{x}$ удовлетворяют нетривиальному условию

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$$

и потому контравариантный вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ переводится в нуль всеми $A^*$. Для отдельной матрицы невырожденность любого рода означает неособенность. Множество матриц $\mathfrak{A}$, содержащее единичную матрицу или любую неособенную матрицу, не является вырожденным ни в первом, ни во втором смысле. Векторы $\mathfrak{x}$, удовлетворяющие соотношению $A\mathfrak{x} = 0$ для всех $A$ из $\mathfrak{A}$, и векторы вида $A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + \ldots$ ($A, B, \ldots \in \mathfrak{A}$), очевидно, образуют инвариантные подпространства. Поэтому неприводимое множество $\mathfrak{A}$ не может быть вырожденным первого рода, за исключением того случая, когда $A\mathfrak{x} = 0$ для всех $A$ из $\mathfrak{A}$ и всех векторов $\mathfrak{x}$. Но тогда $\mathfrak{A}$ состоит из единственной матрицы $A = 0$, и вследствие неприводимости порядок ее должен быть равен 1. Матричную алгебру $\mathfrak{A}$, состоящую из одной лишь однострочной матрицы 0, или абстрактную алгебру, состоящую из единственного элемента 0, мы будем называть *нулевой алгеброй*. Таким образом, неприводимая матричная алгебра, если только она — не нулевая, не может быть выраженной первого, а также, как легко доказывается аналогичным способом, — и второго рода.

Неприводимая матричная алгебра $\mathfrak{A}$, рассматриваемая как абстрактная алгебра, называется *простой*; или, другими словами, *простая алгебра $\mathfrak{a}$ есть алгебра, допускающая точное неприводимое представление* $\mathfrak{A}$: $a \longrightarrow A$. Нулевая алгебра не считается простой по условию.

Если алгебра $\mathfrak{a}$ содержит единицу $e$, то при представлении $a \longrightarrow R(a)$ этой алгебры единице соответствует идемпотентная матрица $T(e) = J$, т. е. матрица, удовлетворяющая условию $JJ = J$. Построим в нашем пространстве $\mathrm{P}$ подпространства $\mathrm{P}_0$ и $\mathrm{P}_1$ тех векторов $\mathfrak{x}_0$ и $\mathfrak{x}_1$, для которых, соответственно,

$$J\mathfrak{x}_0 = 0, \qquad J\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1.$$

Эти подпространства линейно независимы, и $\mathrm{P}$ расщепляется на $\mathrm{P}_0 \dotplus \mathrm{P}_1$, потому что

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 \text{ влечет за собой } J\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$$

и дает таким образом требуемое однозначное разложение

$$\mathfrak{x}_1 = J\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x} - J\mathfrak{x} \tag{2.1}$$

(разложение Пирса). В системе координат, приуроченной к этому разложению, $J$ является единичной матрицей, окаймленной нулями:

$$J = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Каждая матрица $A = R(a)$ вследствие равенств

$$AJ = JA = A,$$

соответствующих равенствам $ae = ea = a$, содержит нулевое окаймление той же ширины. Поэтому мы можем и будем ограничиваться *невырожденными представлениями*, в которых $e$ представляется единичной матрицей $E$. Самые общие представления получаются из них окаймлением всех матриц нулями.

Совокупность всех $k$-матриц $n$-го порядка называется *полной матричной алгеброй* $\mathfrak{M}_n$; ранг ее равен $n^2$.

Из заданного множества $\mathfrak{A} = \{A\}$ матриц $n$-го порядка можно получить два множества $t\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_t$, состоящие из всех матриц порядка $nt$ вида

$$\begin{Vmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A \end{Vmatrix}$$

или соответственно

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1t} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{t1} & \dots & A_{tt} \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

($A \in \mathfrak{A}$, $A_{ik} \in \mathfrak{A}$). Если $\mathfrak{A}$ — алгебра, то и $t\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_t$ — алгебры. Докажем следующую лемму:

Лемма (III.2.A). *Если $\mathfrak{A}$ — неприводимая (и ненулевая) алгебра, то и $\mathfrak{A}_t$ — неприводимая алгебра.*

Таким образом нижним индексом $t$ указывается формальный процесс получения новых простых алгебр из заданной.

Доказательство. Векторы нашего $tn$-мерного пространства $\mathrm{P}^t$ можно описать как системы $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_t)$ из $t$ произвольных векторов основного $n$-мерного пространства $\mathrm{P}$. Пусть $\Sigma^t$ — подпространство пространства $\mathrm{P}^t$, инвариантное относительно $\mathfrak{A}_t$ и содержащее, по крайней мере, один вектор

$$(\mathfrak{x}_1^0, \ldots, \mathfrak{x}_t^0) \neq (0, \ldots, 0);$$

предположим, что $\mathfrak{x}^0 = \mathfrak{x}_1^0 \neq 0$. Произведя над этим вектором операцию (2.2), в которой равны нулю все $A_{ik}$, за исключением одного $A_{\tau 1} = A$ в первом столбце, находим, что

$$(0, \ldots, A\mathfrak{x}^0, \ldots, 0)$$

принадлежит $\Sigma^t$. Так как вырожденный случай исключен нами, то можно выбрать $A_0$ в $\mathfrak{A}$ так, чтобы $A_0\mathfrak{x}^0 \neq 0$; поэтому заключаем, что в $\Sigma^t$ содержится по крайней мере один вектор вида

$$(0, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \ldots, 0),$$

отличный от нуля. Пусть $A_{\tau\tau} = A$ пробегает $\mathfrak{A}$ и пусть все остальные $A_{ik} = 0$. Вследствие неприводимости $\mathfrak{A}$ мы видим тогда, что *каждый* вектор вида

$$(0, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \ldots, 0)$$

содержится в $\Sigma^t$. Суммируя по $\tau = 1, \ldots, t$, приходим к заключению, что $\Sigma^t$ совпадает с $\mathrm{P}^t$.

Последним в этом разрозненном собрании будет замечание, фиксирующее стандартное рассуждение, встретившееся уже нам в § 1 и вновь встречающееся часто и дальше.

Лемма (III.2.B). *Из заданной последовательности неприводимых инвариантных подпространств* $\Sigma_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ *можно выбрать подпоследовательность, все члены которой линейно независимы и дают ту же сумму, что и вся последовательность.*

Предполагается, конечно, что векторное пространство $\mathrm{P}$ подвергается действию заданного множества $\mathfrak{A}$ матриц. Пересечению любого $\Sigma_j$ из нашей последовательности с суммой предшествующих членов $\Sigma_1 + \ldots + \Sigma_{j-1}$ является инвариантным подпространством и потому есть либо 0, либо все $\Sigma_j$. В первом случае мы оставляем $\Sigma_j$, во втором — опускаем.

## 3. Представления простой алгебры [2]

Теорема (III. 3. A). *Алгебра с делением* $\mathfrak{a}$ *является простой: уже ее регулярное представление* ($\mathfrak{a}$) — *и неприводимое, и точное.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{a}$, рассматриваемое как векторное пространство, снова через $\rho$. Подпространство $\rho'$ пространства $\rho$, инвариантное относительно всех операций $x \longrightarrow ax$ и содержащее элемент $i \neq 0$, должно содержать каждый элемент вида $ai$ и следовательно каждый элемент $c$ вообще: $a = c \cdot i^{-1}$.

Теорема (III.3.B). *Каждое невырожденное представление алгебры с делением* $\mathfrak{a}$ *является кратным* $t(\mathfrak{a})$ *ее регулярного представления* ($\mathfrak{a}$).

Пусть $a \longrightarrow T(a)$ — заданное невырожденное представление в $n$-мерном векторном пространстве $P$; пусть $\mathfrak{x}$ обозначает общий вектор пространства $P$ и $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ — систему координат. Имеем $T(e) = E$. К подпространствам пространства $P$ мы будем применять термины инвариантно, неприводимо, подразумевая инвариантность и неприводимость по отношению к алгебре $\mathfrak{T}$ матриц $T(a)$. Равенство $\mathfrak{x}' = a\mathfrak{x}$ означает, что $\mathfrak{x}' = T(a)\mathfrak{x}$. Пусть $P_i$ — подпространство, состоящее из всех векторов $\mathfrak{x} = x\mathfrak{e}_i$, где $x$ пробегает $\mathfrak{a}$. Установленное этим соответствие $x \longrightarrow \mathfrak{x}$ является подобием, т. е. $ax$ переходит в $a\mathfrak{x}$; поэтому $P_i$ инвариантно относительно преобразований $T(a)$ из $\mathfrak{T}$. Тогда либо $P_i$ — нуль, либо это отображение $\rho$ на $P_i$ есть взаимно однозначное соответствие. Действительно, элементы $x$, для которых $x\mathfrak{e}_i = 0$, образуют в $\rho$ инвариантное подпространство; и так как ($\mathfrak{a}$) неприводимо, то либо каждое $x$ удовлетворяет соотношению $x\mathfrak{e}_i = 0$, либо никакое $x$, кроме нуля, ему не удовлетворяет. Первый случай $P_i = 0$ здесь исключен, поскольку $e\mathfrak{e}_i = E\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_i \neq 0$. Сумма $P_1 + \ldots + P_n$ содержит каждый из базисных векторов $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ и потому совпадает со всем пространством $P$. Применяя лемму (III.2.B) к последовательности $P_1, \ldots, P_n$, мы расщепляем $P$ на некоторое число линейно независимых инвариантных подпространств $P_{\alpha_1}, \ldots, P_{\alpha_t}$, в каждом из которых $\mathfrak{T}$ индуцирует представление, эквивалентное регулярному представлению ($\mathfrak{a}$).

Если допускать вырождение, то $\mathfrak{T}$ будет прямой суммой кратного регулярного представления и кратного нулевого представления.

Теорема (III.3.C). *Простая алгебра* $\mathfrak{a}$ *содержит единичный элемент. Ее регулярное представление является*

*$t$-кратным того точного неприводимого представления $\mathfrak{A}$: $a \to A$, которым $\mathfrak{a}$ была определена. Ранг $h$ алгебры $\mathfrak{a}$ кратен степени $g$ этого представления: $h = gt$.*

Матрицы $A$ порядка $g$ являются линейными отображениями в $g$-мерном векторном пространстве $\mathrm{P}$. Регулярное представление $(\mathfrak{A})$ сопоставляет матрице $A$ линейное отображение

$$(A)\colon X \to X' = AX,$$

аргумент которого $X$ пробегает линейную совокупность $\mathfrak{A}$, выступающую здесь как $h$-мерное векторное пространство $\rho$. Выделим в $\rho$ неприводимое инвариантное подпространство $\rho_1$. Оно подобно пространству $\mathrm{P}$ по отношению к соответственным их преобразованиям $(A)$ и $A$. Действительно, пусть $A^0$ — ненулевой элемент из $\rho_1$ и $\mathfrak{e}$ — вектор из $\mathrm{P}$ такой, что $A^0\mathfrak{e} \neq 0$. Формула $\mathfrak{x} = X\mathfrak{e}$ $(X \in \rho_1)$ отображает $\rho_1$ на инвариантное подпространство $\rho_1\mathfrak{e}$ пространства $\mathrm{P}$ посредством соответствия $X \to \mathfrak{x}$, являющегося подобием, поскольку $X \to \mathfrak{x}$ влечет за собой $AX \to A\mathfrak{x}$. Вследствие неприводимости представления $\mathfrak{A}$, подпространство $\rho_1\mathfrak{e}$ есть либо нуль, либо все пространство $\mathrm{P}$. Первая возможность здесь исключена, поскольку $A^0\mathfrak{e} \neq 0$. В остающемся же случае подобие $X \to \mathfrak{x}$ в силу неприводимости $\rho_1$ является взаимно однозначным соответствием между $\rho_1$ и $\mathrm{P}$: те $X$ из $\rho_1$, для которых $X\mathfrak{e} = 0$, образуют в $\rho_1$ инвариантное подпространство, и потому единственным таким элементом является $X = 0$. Это доказывает, что *любая неприводимая часть представления $(\mathfrak{A})$ эквивалентна представлению $\mathfrak{A}$.*

Так как каждый вектор $\mathfrak{x}$ из $\mathrm{P}$ представим в виде $X\mathfrak{e}$ $(X \in \rho_1)$, то, в частности, в $\rho_1$ существует элемент $I_1$ такой, что $\mathfrak{e} = I_1\mathfrak{e}$. Вследствие инвариантности $\rho_1$, матрица $XI_1$ лежит в $\rho_1$ для каждой матрицы $X$ из $\rho$. Так как обе матрицы $X$ и $XI_1$ переводят $\mathfrak{e}$ в один и тот же вектор $\mathfrak{x} = X\mathfrak{e}$, то для $X$, лежащих в $\rho_1$, они должны совпадать; в частности, $I_1 I_1 = I_1$: матрица $I_1$ является *производящим идемпотентом* подпространства $\rho_1$ в $\rho$. Применяем теперь к $\rho$ идею пирсовского разложения и вводим инвариантные подпространства $\rho_1$ и $\sigma_1$ тех $X$, которые соответственно удовлетворяют уравнениям $XI_1 = X$, $XI_1 = 0$. Первое из них действительно является подпространством, обозначавшимся ранее через $\rho_1$. Единственность разложения каждого $X$ из $\rho$ на матрицу $X_1$ из $\rho_1$ и матрицу $Y_1$ из $\sigma_1$,

$$X = X_1 + Y_1, \tag{3.1}$$

обеспечивается тем, что из (3.1) следует

(3.2) $$X_1 = XI_1 \qquad (Y_1 = X - XI_1).$$

Повторяя этот процесс, мы определим неприводимое инвариантное подпространство $\rho_2$ пространства $\sigma_1$, производящий идемпотент $I'_2$ подпространства $\rho_2$ в $\sigma_1$ и с его помощью разложение $\sigma_1$ на $\rho_2$ и дополнительное инвариантное подпространство $\sigma_2$:

$$Y_1 = Y_1 I'_2 + (Y_1 - Y_1 I'_2) = X_2 + Y_2,$$
$$Y_1 \in \sigma_1;\ X_2 \in \rho_2,\ Y_2 \in \sigma_2, \text{ т. е. } Y_2 I'_2 = 0.$$

Воспользовавшись выражением (3.2) для общей матрицы $Y_1$ из $\sigma_1$, получаем

(3.3) $$X_2 = (X - XI_1) I'_2 = XI_2, \qquad Y_2 = X - (XI_1 + XI_2),$$

где

$$I_2 = I'_2 - I_1 I'_2.$$

Следующим шагом разбиваем $\sigma_2$ на неприводимое инвариантное подпространство $\rho_3$, порождаемое в $\sigma_2$ идемпотентом $I'_3$, и дополнительное инвариантное подпространство $\sigma_3$. $\rho_3$ состоит из матриц вида $Y_2 I'_3$ $(Y_2 \in \sigma_2)$, т. е. в силу (3.3) — вида

$$XI_3 \quad \{X \in \rho,\ I_3 = I'_3 - (I_1 I'_3 + I_2 I'_3)\}.$$

Продолжая так дальше, мы получим в окончательном итоге *разложение пространства* $\rho$ *на неприводимые инвариантные подпространства* $\rho_1, \ldots, \rho_t$ по формуле

$$X = XI_1 + XI_2 + \ldots + XI_t \qquad (X \in \rho).$$

Как мы уже знаем, каждая неприводимая часть регулярного представления эквивалентна представлению $\mathfrak{A}$; поэтому (α) эквивалентно $t$-кратному от $\mathfrak{A}$ и $h = tg$.

Так как компонентой $X_\alpha$ матрицы $X$ в $\rho_\alpha$ служит $XI_\alpha$, то, в частности, для матрицы $X = I_\beta$ (у которой $\beta$-вой компонентой является $I_\beta$, все же остальные компоненты — нули) получаем:

$$I_\beta I_\alpha = \begin{cases} I_\alpha & \text{для } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{для } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Сумма

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_t$$

удовлетворяет уравнению $AI = A$ для всех $A$ из $\mathfrak{A}$ и в частности $I \cdot I = I$. Вектор $\mathfrak{y}$, переводимый матрицей $I$ в нуль,

$$(3.4) \qquad I\mathfrak{y} = 0,$$

удовлетворяет уравнению

$$A\mathfrak{y} = 0 \text{ для всех } A \in \mathfrak{A},$$

поскольку $A\mathfrak{y} = AI\mathfrak{y}$. Так как тривиальный случай нулевой алгебры нами исключен, то заключаем, таким образом, что свойством (3.4) обладает лишь $\mathfrak{y} = 0$. Тогда пирсовское разложение (2.1) сразу показывает, что $\mathfrak{x} = I\mathfrak{x}$ для каждого вектора $\mathfrak{x}$, т. е. что $I$ есть единичная матрица; таким образом $\mathfrak{A}$ *содержит единичную матрицу* $E$, и, следовательно, $\mathfrak{a}$ — единичный элемент $e$, представляемый в $\mathfrak{A}$ матрицей $E$.

Метод, с помощью которого мы получили теорему (III.3.B), может быть использован для доказательства одного общего утверждения, которое заслуживает упоминания, хотя и не будет фигурировать в качестве необходимой части нашего теоретического построения.

Теорема (III.3.D). *Если регулярное представление* ($\mathfrak{a}$) *алгебры* $\mathfrak{a}$ *расщепляется на неприводимые части* $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots,$ *то всякое представление, не являющееся вырожденным первого рода, расщепляется на неприводимые части, каждая из которых эквивалентна одному из* $\mathfrak{A}_l$.

Доказательство. Предположение теоремы состоит в том, что алгебра $\mathfrak{a}$, рассматриваемая как пространство $\rho$ регулярного представления, разлагается на неприводимые инвариантные подпространства $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_l$. Пусть $\mathfrak{x}$ — общий вектор и $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_g$ — система координат пространства $P$ заданного представления

$$\mathfrak{A}\colon\ a \longrightarrow T(a).$$

$\mathfrak{x}' = a\mathfrak{x}$ снова будет означать $\mathfrak{x}' = T(a)\mathfrak{x}$, а $\rho_a\mathfrak{e}$ — совокупность всех векторов $\mathfrak{x} = x\mathfrak{e}$ $(x \in \rho_a)$. Образуем тогда таблицу

$$\begin{matrix} \rho_1\mathfrak{e}_1, & \ldots, & \rho_l\mathfrak{e}_1 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \rho_1\mathfrak{e}_g, & \ldots, & \rho_l\mathfrak{e}_g \end{matrix}$$

и применим к ней лемму (III. 2. B). Представление, индуцируемое представлением $\mathfrak{A}$ в любом из оставленных подпространств $\rho_l\mathfrak{e}_k$, эквивалентно представлению, индуцируемому в $\rho_l$ регулярным представлением; действительно, такое подпространство $\rho_l\mathfrak{e}_k$ — ненулевое и посредством отображения $x \longrightarrow x\mathfrak{e}_k$ $(x \in \rho_l)$ ставится во взаимно однозначное подобное соответствие с $\rho_l$. Сумма всей таблицы содержит каждый вектор $a\mathfrak{x}$ ($a \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{x} \in P$), а следовательно и всякий вектор вообще, поскольку вырождение первого рода по условию исключено.

Непосредственным следствием этого и предыдущего предложений является

Теорема (III.3.E). *Каждое невырожденное представление простой алгебры $\mathfrak{a}$ эквивалентно кратному ее точного неприводимого представления $\mathfrak{A}$. В частности, $\mathfrak{A}$ является единственным неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{a}$.*

## 4. Теорема Веддербёрна

Мы приходим теперь к связи между проведенным анализом и идеей коммутатора. Она имеет своим источником следующую теорему:

Теорема (III.4.A). *Если алгебра $\mathfrak{a}$ содержит единичный элемент $e$, то единственными линейными преобразованиями, перестановочными со всеми преобразованиями* $(a)$: $x \longrightarrow x' = ax$, *являются преобразования вида* $(b)'$: $x \longrightarrow y = xb$ ($b$ — *элемент из* $\mathfrak{a}$).

Действительно, если $y = B(x)$ — такой коммутатор, то мы должны по определению иметь

$$B(a \cdot x) = a \cdot B(x). \tag{4.1}$$

Положив $B(e) = b$ и применив (4.1) к $x := e$, придем к требуемой формуле $B(a) = ab$ для каждого $a$.

Обозначим через $\mathfrak{a}'$ *инверсную алгебру* алгебры $\mathfrak{a}$, т. е. алгебру, отличающуюся от $\mathfrak{a}$ тем, что теперь произведение двух элементов $a$ и $b$ определяется как $ba$, а не $ab$. Тогда наш результат можно выразить так: *коммутаторной алгеброй регулярного представления алгебры $\mathfrak{a}$ служит регулярное представление инверсной алгебры $\mathfrak{a}'$*; таким образом эта связь — взаимная.

В частности, применяем это к *алгебре с делением* $\mathfrak{a}$; тогда оба регулярных представления $(\mathfrak{a})$ и $(\mathfrak{a})'$ неприводимы.

Вернемся снова к нашей *простой алгебре* $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{a}$. *Коммутаторная алгебра* $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ есть in abstracto алгебра с делением $\mathfrak{d}'$ (ранга $d$), следовательно in concreto — кратное $t(\mathfrak{d}')$ ее регулярного представления $(\mathfrak{d}')$; таким образом, общая матрица алгебры $\mathfrak{B}$ имеет вид

$$B = \left\| \begin{matrix} (b)' & & \\ & \cdot & \\ & & (b)' \end{matrix} \right\| \qquad (t \text{ строк}), \tag{4.2}$$

где $(b)'$ пробегает все операторы

$$x \longrightarrow x' = xb \qquad (x \text{ — переменная из } \mathfrak{d}),$$

порождаемые элементами $b$ инверсной алгебры $\mathfrak{d}$. Следовательно, $g = d \cdot t$. Коммутаторная алгебра $\bar{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathfrak{B}$ состоит из всех матриц вида

$$\bar{A} = \begin{Vmatrix} (a_{11}) \dots (a_{1t}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (a_{t1}) \dots (a_{tt}) \end{Vmatrix}, \tag{4.3}$$

где каждое $(\dot{a}_{ik})$ есть оператор

$$x \longrightarrow x' = \dot{a}_{ik} x \qquad (\dot{a}_{ik} \in \mathfrak{d})$$

из регулярного представления $(\mathfrak{d})$ алгебры с делением $\mathfrak{d}$; таким образом,

$$\bar{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{d})_t. \tag{4.4}$$

$\bar{\mathfrak{A}}$, коммутатор коммутатора алгебры $\mathfrak{A}$, очевидно, содержит $\mathfrak{A}$. *Мы желаем установить тот факт, что* $\bar{\mathfrak{A}}$ *совпадает с* $\mathfrak{A}$. Для этой цели заметим, что коммутатор коммутатора алгебры $u\mathfrak{A}$ обязательно содержит $u\bar{\mathfrak{A}}$, потому что коммутаторной алгеброй алгебры $u\mathfrak{A}$ служит $\mathfrak{B}_u$. Поэтому, если бы $\bar{\mathfrak{A}}$ было в действительности шире, чем $\mathfrak{A}$, то это же имело бы место и для $u\mathfrak{A}$, и в частности для того кратного $\tau\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{A}$, которое, по теореме (III.3.C), $\sim (\mathfrak{a})$. Это, однако, противоречит сделанному выше замечанию, что $(\mathfrak{a})$ есть коммутатор коммутатора $(\mathfrak{a}')$ алгебры $(\mathfrak{a})$. Таким образом мы получаем возможность заменить равенство (4.4) теоремой Веддербёрна*):

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{d})_t. \tag{4.5}$$

Она показывает, что рангом $h$ нашей простой алгебры $\mathfrak{a}$ служит $d \cdot t^2 = g \cdot t$ и, следовательно, упомянутое выше число $\tau$ равно $t$:

$$(\mathfrak{a}) \sim t\mathfrak{A}.$$

Абстрактно говоря, теорема (4.5) утверждает, что наша простая алгебра изоморфна алгебре $t$-строчных матриц,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1t} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{t1} \dots a_{tt} \end{Vmatrix}, \tag{4.6}$$

---

*) На этот сокращенный путь к теореме Веддербёрна обратил мое внимание Р. Брауэр.

элементы которых $a_{ik}$ берутся из алгебры с делением $\mathfrak{d}$. Она выходит за пределы этого абстрактного утверждения, говоря нам, как получить конкретную матричную форму $\mathfrak{A}$ для $\mathfrak{a}$, а именно, — путем замены каждого элемента $a_{ik}$ из $\mathfrak{d}$ $d$-строчной матрицей $(a_{ik})$. В терминах нормальной формы (4.6) произвольного элемента $a$ из $\mathfrak{a}$, уравнение

$$(a)\colon\ x' = ax \qquad (a \text{ и } x \in \mathfrak{a})$$

читается:

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik} x_{kj} \qquad (a_{ik},\ x_{ik} \in \mathfrak{d}).$$

Выделение индивидуальных столбцов $(x_{1j}, \ldots, x_{tj})$ даст разложение регулярного представления $(\mathfrak{a})$ на $t$ раз взятое $\mathfrak{A}$. Коммутаторная алгебра $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{d}'$, а потому и $\mathfrak{d}$, *однозначно определены* представлением $\mathfrak{A}$.

Теорема (III.4.B). *Связь между неприводимой матричной алгеброй $\mathfrak{A}$ и ее коммутаторной алгеброй $\mathfrak{B}$ взаимна: $\mathfrak{A}$ есть полная коммутаторная алгебра алгебры $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ выражается посредством однозначно определенной алгебры с делением $\mathfrak{d}$ ранга $d$, как $t\cdot(\mathfrak{d}')$, $\mathfrak{A}$ — как $(\mathfrak{d})_t$. Кроме $h = tg$ имеем $g = dt$, следовательно $h = dt^2$.*

Сформулируем здесь специально следующий частный случай этой теоремы:

Теорема (III.4.C). *Неприводимая алгебра $\mathfrak{A}$ ранга $g$, единственными коммутаторами которой являются кратные $aE$ единичной матрицы $E$ (случай $d = 1$), есть полная матричная алгебра $\mathfrak{M}_g$ над $k$ (и потому неприводима в любом поле над $k$ — „абсолютная неприводимость“).*

Если $k$ алгебраически замкнуто, то единственными коммутаторами алгебры $\mathfrak{A}$ являются кратные единичной матрицы и потому $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_g$. В этой форме наша теорема принадлежит Бёрнсайду, тогда как общий критерий (III.4.C), справедливый при любом поле $k$, предложен Фробениусом и И. Шуром[3].

Элементы $a$ из $\mathfrak{a}$, перестановочные со всеми элементами $x$,

$$ax = xa, \tag{4.7}$$

образуют *центр* $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{a}$. Соответствующая матрица $A$ должна одновременно являться некоторой матрицей $B$ из коммутаторной алгебры, т. е. в (4.3), (4.6) мы должны, соответственно, иметь

$$(a_{ik}) = (z)\delta_{ik}, \qquad a_{ik} = z\delta_{ik}, \tag{4.8}$$

где $z$ обозначает элемент из центра алгебры с делением $\mathfrak{d}$. Поэтому центр алгебры $\mathfrak{a}=\mathfrak{d}_t$ изоморфен центру алгебры с делением $\mathfrak{d}$. Несколько более прямым путем можно притти к тому же результату следующим образом. Беря в матрице $x=\|x_{ik}\|$, входящей в уравнение (4.7), т. е. в

$$\sum_k a_{ik}x_{kj}=\sum_k x_{ik}a_{kj}, \tag{4,9}$$

в качестве элементов $x_{ik}=\xi_{ik}e$ ($\xi_{ik}$ — числа из $k$, $e$ — единица алгебры $\mathfrak{d}$), получаем (4.8), т. е. $\|a_{ik}\|=zE$, а тогда (4.9) показывает, что $z$ должно быть перестановочно в $\mathfrak{d}$ с каждым $x$.

Полная взаимность между алгеброй и ее коммутаторной алгеброй достигается лишь при переходе от неприводимого представления $\mathfrak{A}$ нашей простой алгебры $\mathfrak{a}$ к его кратному $s\mathfrak{A}$. Нетрудно видеть, что для этой алгебры, $s\cdot(\mathfrak{d})_t$, коммутаторной алгеброй служит $[t\cdot(\mathfrak{d}')]_s$. Строение общих элементов наших двух алгебр указано схемами

(4.10)

$$\left|\begin{array}{c|c}
\begin{matrix}(a_{11}) & \ldots & (a_{1t})\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ (a_{t1}) & \ldots & (a_{tt})\end{matrix} & 0\\
\hline
0 & \begin{matrix}(a_{11}) & \ldots & (a_{1t})\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ (a_{t1}) & \ldots & (a_{tt})\end{matrix}
\end{array}\right|
\qquad
\left|\begin{array}{c|c}
\begin{matrix}(b_{11})' & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \ldots & (b_{11})'\end{matrix} & \begin{matrix}(b_{12})' & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \ldots & (b_{12})'\end{matrix}\\
\hline
\begin{matrix}(b_{21})' & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \ldots & (b_{21})'\end{matrix} & \begin{matrix}(b_{22})' & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \ldots & (b_{22})'\end{matrix}
\end{array}\right|$$

где $(a_{ik})$ пробегают независимо друг от друга $(\mathfrak{d})$, а $(b_{\alpha\beta})'$ пробегают $(\mathfrak{d}')$; $i, k=1, \ldots, t$; $\alpha, \beta=1, \ldots, s$. Таким образом (изменяя наши обозначения), *мы имеем пару алгебр*

$$\mathfrak{A}\sim s\,[(\mathfrak{d})_t], \qquad \mathfrak{B}\sim[t\,(\mathfrak{d}')]_s, \tag{4.11}$$

*каждая из которых служит коммутаторной алгеброй для другой;* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *суть алгебры матриц порядка* $g=d\cdot st$, *имеющие, соответственно, ранги*

$$h_{\mathfrak{A}}=d\cdot t^2 \text{ и } h_{\mathfrak{B}}=d\cdot s^2,$$

*откуда*

$$g^2=h_{\mathfrak{A}}\cdot h_{\mathfrak{B}}. \tag{4.12}$$

Эквивалентности (4.11) являются одновременными в том смысле, что алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ описываются схемами (4.10) в одной и той же системе координат.

## 5. Вполне приводимая матричная алгебра и ее коммутаторная алгебра

Следующим предметом нашего изучения будет естественное обобщение матричных алгебр: элементами $a$ будут теперь совокупности $v$ занумерованных матриц над $k$

$$a = (A_1, A_2, \ldots, A_v), \tag{5.1}$$

где каждая компонента $A_u$ есть матрица предписанного порядка $g_u$. Такие элементы можно складывать, перемножать между собой и умножать на числа из $k$, выполняя эти действия над отдельными компонентами. Исследуем алгебры $\mathfrak{a}$ над $k$, состоящие из таких элементов $a$. Каждая компонента, например $A_1 = A_1(a)$, определяет представление $\mathfrak{A}_1$ алгебры $\mathfrak{a}$: $a \longrightarrow A_1$. Применив простой прием записи наших элементов в форме

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & A_v \end{matrix} \right\| \tag{5.2}$$

вместо (5.1), мы могли бы остаться и в пределах матричных алгебр. Докажем следующее предложение:

Теорема (III.5.A). *Если компонентные представления $\mathfrak{A}_u$ алгебры $\mathfrak{a}$, образованной элементами вида* (5.1), *неприводимы и неэквивалентны, то компоненты $A_u$ независимы друг от друга. Регулярное представление алгебры $\mathfrak{a}$ разлагается тогда на неприводимые части, каждая из которых эквивалентна одному из компонентных представлений.*

Утверждаемая „независимость“ может быть сформулирована различными способами. Пожалуй, проще всего сказать, что если

$$a = (A_1, A_2, \ldots, A_v) \tag{5.3}$$

содержится в $\mathfrak{a}$, то это же верно и для

$$\begin{matrix} a_1 = (A_1, 0, \ldots, 0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_v = (0,\ 0, \ldots, A_v). \end{matrix} \tag{5.4}$$

Иными словами, когда $a$ изменяется в $\mathfrak{a}$, то каждая компонента $A_u(a)$ независимо пробегает всю ее область значений $\mathfrak{A}_u$. Или еще: $\mathfrak{a}$ есть прямая сумма алгебр $\mathfrak{A}_u$.

Доказательство точно следует плану, принятому в доказательстве теоремы (III.3.C). $\mathfrak{a}$ есть векторное пространство $\rho$. В неприводимом инвариантном подпространстве $\rho_1$ пространства $\rho$ снова выделяем элемент $a^0 \neq 0$. По крайней мере одна из его $v$ компонент $A_u^0$, скажем $A_1^0$, отлична от нуля. Выбираем тогда снова вектор $\mathfrak{e}$, для которого $A_1^0\mathfrak{e} \neq 0$, и заключаем, что $\rho_1$ подобно пространству первой компоненты, т. е. пространству представления $\mathfrak{A}_1$ (или, что представление, индуцируемое регулярным представлением в $\rho_1$, эквивалентно $\mathfrak{A}_1$). Теперь делаем следующее простое замечание: ни для какого элемента $a$ из $\rho_1$ вторая компонента $A_2$ не может быть отлична от нуля. Действительно, в противном случае, исходя вместо $a^0$ из такого $a$, мы нашли бы, что $\rho_1$ подобно пространству второй компоненты, что, однако, невозможно вследствие предположенной неэквивалентности представлений $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Разложив $\rho$ на неприводимые инвариантные подпространства $\rho_1, \rho_2, \ldots$, объединяем те из них которые подобны пространству первой компоненты, те, которые подобны пространству второй компоненты, и т. д. Согласно нашему последнему замечанию, это означает, что (5.3) разбивается на члены из $\mathfrak{a}$ вида

$$\begin{array}{l}
(\bar{A}_1\ \ 0, \ldots, \ 0), \\
(0, \ \bar{A}_2, \ldots, \ 0), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(0, \ \ 0, \ \ldots, \bar{A}_v).
\end{array}$$

Но их сумма равна (5.3), следовательно $\bar{A}_u = A_u$, и мы пришли, таким образом, к требуемому результату (5.4).

Рассмотрим в заключение *$k$-алгебру $\mathfrak{a}$ матриц над $k$, разложимую на неприводимые части.* Если эквивалентные из них записывать одинаковым образом, то общий элемент $a$ разобьется на „блоки" вида

$$\boxed{\begin{matrix} A_u(a) & & \\ & \ddots & \\ & & A_u(a) \end{matrix}} \qquad (u = 1, \ldots, v),$$

где

$$\mathfrak{A}_u\colon\ a \rightarrow A_u(a)$$

— неприводимые и взаимно неэквивалентные представления. Лемма (III.1.D), — второй вариант леммы Шура — тогда показывает, что каждый коммутатор $B$ алгебры $\mathfrak{a}$ разбивается на блоки такого же размера. На каждый же отдельный блок распространяется положение, установленное нами в конце предыдущего параграфа: блоку $s_u[(\mathfrak{d}_u)_u]$ заданной алгебры $\mathfrak{A}$ соответствует блок $[t_u(\mathfrak{d}'_u)]_{s_u}$ в коммутаторной алгебре $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{d}_u$ — некоторая алгебра с делением. Наше предложение (III.5.A) относительно алгебр, образованных элементами вида (5.1), показывает, что заданная алгебра $\mathfrak{A}$ есть *прямая сумма* блоков:

$$\mathfrak{A}=\sum_{u=1}^{v} s_u[(\mathfrak{d}_u)_u].$$

В том же смысле имеем

$$\mathfrak{B}=\sum_{u=1}^{v} [t_u(\mathfrak{d}'_u)]_{s_u},$$

и, применяя к $\mathfrak{B}$ то же рассуждение, а именно, в сущности, лемму Шура, легко устанавливаем, что $\mathfrak{A}$ есть коммутаторная алгебра алгебры $\mathfrak{B}$. Если бы некоторые блоки алгебры $\mathfrak{A}$ не были независимыми, то коммутаторная алгебра алгебры $\mathfrak{B}$ была бы существенно шире, чем $\mathfrak{A}$! Таким образом, наше исследование увенчивается следующей теоремой:

Теорема (III.5.B). *Если $k$-алгебра $\mathfrak{A}$ матриц над $k$ разлагается на неприводимые части, то это же верно и для ее коммутаторной алгебры $\mathfrak{B}$. Обратно, $\mathfrak{A}$ служит коммутаторной алгеброй для $\mathfrak{B}$. Строение алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ описывается одновременными эквивалентностями*

$$\mathfrak{A}\sim\sum_{u=1}^{v} s_u[(\mathfrak{d}_u)_u],\qquad \mathfrak{B}\sim\sum_{u=1}^{v} [t_u(\mathfrak{d}'_u)]_{s_u}, \tag{5.5}$$

*где $\mathfrak{d}_u$, $\mathfrak{d}'_u$ — взаимно инверсные (абстрактные) алгебры с делением.*

Вряд ли необходимо особо упоминать, что $\mathfrak{A}$ содержит единичную матрицу $E$. Матрицы алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют порядок $g=\sum\limits_u d_u s_u t_u$, где $d_u$ — ранг алгебры $\mathfrak{d}_u$; ранги алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть соответственно

$$h_{\mathfrak{A}}=\sum_u d_u t_u^2 \quad \text{и} \quad h_{\mathfrak{B}}=\sum_u d_u s_u^2$$

Таким образом, при всех обстоятельствах

$$g^2 \leqslant h_{\mathfrak{A}} h_{\mathfrak{B}}.$$

Как абстрактная алгебра, $\mathfrak{A}$ тождественна алгебре $\mathfrak{a}$ элементов

$$a=(A_1, \ldots, A_v),$$

где каждое $A_u$ независимо пробегает неприводимое множество $\mathfrak{A}_u$ матриц порядка $g_u$, — или, еще более абстрактно,

$$a=(a_1, \ldots, a_v),$$

где $a_u$ пробегает простую алгебру $\mathfrak{a}_u$ ($\mathfrak{a}$ — прямая сумма алгебр $\mathfrak{a}_u$). В том же смысле центр алгебры $\mathfrak{a}$ есть прямая сумма центров алгебр $\mathfrak{a}_u$, которые в свою очередь изоморфны центрам соответствующих алгебр с делением $\mathfrak{d}_u$. Согласно результатам, полученным для любого неприводимого множества, вида $\mathfrak{A}_u$, регулярное представление ($\mathfrak{a}$) расщепляется на $t_1$ раз взятое $\mathfrak{A}_1$ плюс $t_2$ раз взятое $\mathfrak{A}_2$, плюс... Кратность $t_u$, с которой входит каждая неприводимая составляющая $\mathfrak{A}_u$, является делителем порядка $g_u$ матриц этой составляющей:

$$g_u = d_u t_u. \tag{5.6}$$

Используя общее предложение (III.3.D), заключаем:

Теорема (III.5.C). *Всякое невырожденное представление абстрактной схемы* $\mathfrak{a}$ *вполне приводимой матричной алгебры* $\mathfrak{A}$ *разлагается на неприводимые составляющие, каждая из которых эквивалентна одному из* $\mathfrak{A}_u$ $(u=1, \ldots, v)$. *В частности, кратность, с которой эта составляющая входит в регулярное представление алгебры* $\mathfrak{a}$, *есть число* $t_u$ *из теоремы* (III.5.B), *делитель порядка* $g_u$, *определенный равенством* (5.6).

Непосредственным следствием нашего окончательного результата (III.5.B) является следующий критерий, впервые плодотворно использованный Р. Брауэром:

Теорема (III.5.D). *Обертывающая алгебра вполне приводимого множества матриц* $\mathfrak{A}$ *есть коммутаторная алгебра коммутаторной алгебры множества* $\mathfrak{A}$.

Под *полной приводимостью* мы понимаем, что множество матриц $\mathfrak{A}$ разлагается на неприводимые части.

Действительно, обертывающая алгебра $\overline{\mathfrak{A}}$ множества $\mathfrak{A}$ расщепляется тем же способом, что и само $\mathfrak{A}$, и ее части, содержабольше, чем соответствующие части множества $\mathfrak{A}$, тем более неприводимы. Каждый коммутатор $B$ множества $\mathfrak{A}$ является коммутатором и для $\overline{\mathfrak{A}}$. Следовательно, применима теорема (III.5.B), и $\overline{\mathfrak{A}}$ есть коммутаторная алгебра совокупности $\mathfrak{B}$ всех коммутаторов $B$ множества $\mathfrak{A}$.

## B. ГРУППОВОЕ КОЛЬЦО КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ И ЕГО КОММУТАТОРНАЯ АЛГЕБРА

### 6. Постановка задачи

Раздел B будет посвящен теме, тесно связанной с темой раздела A, хотя и менее общей по охвату. Она возникла из задачи *разложения тензорного пространства на его неприводимые компоненты относительно полной линейной группы*, и мы приступаем к ней, имея в виду это применение. Пусть наше основное $n$-мерное векторное пространство $\mathrm{P}$ подвергнуто любому неособенному линейному преобразованию $A = \| a(ik) \|$; тогда под влиянием этого преобразования компоненты произвольного тензора $F(i_1 \dots i_f)$ ранга $f$ подвергаются преобразованию

(6.1) $\Pi_f(A) = A \times A \times \dots \times A$ ($f$ множителей),

т. е. $F$ преобразуется в

$$F'(i_1 \dots i_f) = \sum_{k_1, \dots, k_f} a(i_1 k_1) \dots a(i_f k_f) F(k_1 \dots k_f).$$

Все аргументы или индексы $i$ и $k$ пробегают целые значения от 1 до $n$. Тензоры ранга $f$ образуют векторное пространство $\mathrm{P}f$ размерности $n^f$. Мы говорим, что $A$ *индуцирует* в $\mathrm{P}_f$ преобразование $\Pi_f(A)$. Соответствие $A \longrightarrow \Pi_f(A)$ определяет представление группы $GL(n)$ в $\mathrm{P}_f$. Примерами инвариантных подпространств в $\mathrm{P}_f$ служат совокупности всех *симметрических* или же всех *косо-симметрических* тензоров, а также, в очевидное обобщение этих простейших случаев, *совокупность всех тензоров, удовлетворяющих каким-нибудь условиям симметрии*. Чтобы описать, что такое условие симметрии, мы должны сперва выяснить, что означает *применить к заданному тензору $F$ подстановку $s$* нижних индексов $1, \dots, f$. Пусть $s$ — подстановка

(6.2) $1 \longrightarrow 1', \dots, f \longrightarrow f'$,

тогда $F' = sF$ мы определим формулой

(6.3) $F'(i_1 i_2 \dots i_f) = F(i_{1'}, i_{2'}, \dots, i_{f'})$.

Этим обеспечивается выполнение желательного нам соотношения $t(sF)=(ts)F$ для любых двух подстановок $s: \alpha \longrightarrow \alpha'$ и $t: \alpha' \longrightarrow \alpha''$ $\{\alpha=1, \ldots, f\}$, композиция которых $ts$ определена как $\alpha \longrightarrow \alpha''$. Действительно, принятая нами последовательность в выполнении композиции сохраняется, если подстановке $s$ сопоставить следующие (линейные) преобразования сначала переменных $i$ в новые переменные $i'$, а затем функции $F$ в новую функцию $F'$:

$$i'_{\alpha'}=i_{\alpha}, \qquad F'(i'_{\alpha})=F(i_{\alpha}).$$

Вытекающее отсюда равенство

$$F'(i'_{\alpha})=F(i'_{\alpha'})$$

совпадает с (6.3), если заменить $i'$ на $i$. Подстановки $f$ индексов образуют *симметрическую группу* $\gamma=\pi_f$ порядка $f!$.

*Линейное условие симметрии*, наложенное на тензор $F$, есть соотношение

$$\sum_s a(s)\, sF=0 \tag{6.4}$$

с произвольными коэффициентами $a(s)$; оно утверждает, что *оператор симметрии*

$$\mathbf{a}=\sum_s a(s)\, s$$

переводит $F$ в 0: $\mathbf{a}F=0$. Операторы симметрии можно очевидным образом складывать и умножать на числа. Более того, последовательное применение операторов

$$\mathbf{a}=\sum_s a(s)\, s, \qquad \mathbf{b}=\sum_s b(s)\, s$$

(сперва $\mathbf{a}$, затем $\mathbf{b}$) порождает новый оператор симметрии $\mathbf{c}$, произведение $\mathbf{ba}$, определенное формулой

$$\sum_{t,t'} b(t')\, a(t)\, t't=\sum_s c(s)\, s,$$

где

$$c(s)=\sum_{t't=s} b(t')\, a(t)=\sum_t b(st^{-1})\, a(t)=\sum_t b(t)\, a(t^{-1}s). \tag{6.5}$$

Правила выполнения операций сложения и умножения зависят лишь от *структуры* рассматриваемой группы $\pi_f$ и ничем не связаны со специальной реализацией групповых элементов $s$ в виде линейных преобразований $F \longrightarrow sF$ в пространстве $\mathrm{P}_f$.

Поэтому естественно стать снова на абстрактную точку зрения: каждая конечная группа $\gamma$ порядка $h$ порождает алгебру ранга $h$, так называемое *групповое кольцо* $\mathfrak{r}$ над $k$, состоящее из всех линейных комбинаций групповых элементов $s$ с коэффициентами $a(s)$ из $k$:

$$a=\sum_{s} a(s)\cdot s. \tag{6.6}$$

Здесь сумма—лишь наводящий способ записи, „*величина*“ $a$ из $\mathfrak{r}$ есть не что иное, как совокупность коэффициентов $a(s)$ или функция $a(s)$, определенная на группе. Существенно лишь определение трех операций: если $a$ имеет коэффициенты $a(s)$, а $b$ — коэффициенты $b(s)$, то $a+b$, $\lambda a$, $ba$ имеют соответственно коэффициенты

$$a(s)+b(s), \quad \lambda a(s) \quad \text{и} \quad (6.5)$$

($\lambda$ — произвольное число из $k$). Все аксиомы, характерные для алгебры, выполнены; закон ассоциативности умножения есть непосредственное следствие соответствующего закона для элементов группы. Групповое кольцо содержит единицу 1. Переход от группы к групповому кольцу существенно облегчает ее изучение благодаря пополнению списка допустимых операций, включавшего первоначально лишь умножение $ba$, еще сложением $a+b$ и умножением на числа $\lambda a$.

Возвращаясь к симметрической группе $\pi_f$ порядка $f!$ и реализации ее элементов и величин $a$ из группового кольца линейными операторами $F\longrightarrow aF$ в тензорном пространстве, следует заметить, что эта реализация, вообще говоря, — не изоморфная или точная. Если мы положим $\delta_s=+1$ или $-1$ соответственно тому, четна или нечетна подстановка $s$, то альтернирование $\sum\delta_s\cdot s$ будет переводить каждый тензор $F$, ранг которого $f$ превосходит размерность $n$, в нуль

$$\sum_{s}\delta_s\cdot sF=0.$$

Группу преобразований $\Pi_f(A)$, индуцируемых в $P_f$ всеми неособенными линейными преобразованиями пространства $P$, естественно заменить ее обертывающей алгеброй

$$\mathfrak{A}_f=[\Pi_f(A)]_{A\in GL(n)}.$$

Легко видеть, и позже будет в явном виде доказано [теорема (IV.4.E)], что эта алгебра $\mathfrak{A}_f$ состоит из всех преобразований

$$A_f=\|a(i_1\ldots i_f;\ k_1\ldots k_f)\| \tag{6.7}$$

в тензорном пространстве, симметричных в том смысле, что $a(i_1 \ldots i_f;\ k_1 \ldots k_f)$ не изменяется, когда оба ряда аргументов $i_1, \ldots, i_f$ и $k_1, \ldots, k_f$ подвергаются одной и той же подстановке $s$, (6.2):

$$(6.8)\qquad a(i_{1'} \ldots i_{f'};\ k_{1'} \ldots k_{f'}) = a(i_1 \ldots i_f;\ k_1 \ldots k_f).$$

Так как термин „симметричный“ употребляется для весьма многих других целей и притом также связанных с линейными преобразованиями, то я предлагаю присвоить рассматриваемому здесь роду симметрии наименование „*бисимметрия*“. Бисимметричный оператор в тензорном пространстве можно описать, как оператор, перестановочный со всеми $f!$ операторами симметрии $F \longrightarrow sF$. Действительно, положим

$$a(i_{1'} \ldots i_{f'};\ k_{1'} \ldots k_{f'}) = a'(i_1 \ldots i_f;\ k_1 \ldots k_f);$$

тогда равенство

$$G(i_1 \ldots i_f) = \sum_k a(i_1 \ldots i_f;\ k_1 \ldots k_f)\, F(k_1 \ldots k_f)$$

в силу (6.3) дает

$$\underline{s}G(i_1 \ldots i_f) = \sum_k a'(i_1 \ldots i_f;\ k_1 \ldots k_f) \cdot sF(k_1 \ldots k_f)$$

или, в легко понятных обозначениях,

$$s^{-1}A'_f s = A_f \quad \text{или} \quad A'_f = sA_f s^{-1}.$$

Поскольку подстановки $s$ входят в определение алгебры $\mathfrak{A}_f$, нет ничего удивительного в том, что исследование действия группы $GL(n)$ на тензорное пространство связано с симметрической группой $\pi_f$.

Идея замены группы преобразований $\Pi_f(A)$, $A \in GL(n)$, обертывающей алгеброй $\mathfrak{A}_f$ всех бисимметричных $A_f$ впервые была подсказана автору *применением этих теорий к квантовой механике*[4]. Там тензор $F$ описывает *состояние физической системы*, образованной из $f$ однородных частиц, скажем, электронов. Каждая наблюдаемая физическая величина представляется линейным оператором $A_f$ в тензорном пространстве, и в частности изменение $\dot{F} = \frac{dF}{dt}$ состояния $F$ в момент $t$ определяется оператором $H$, представляющим *энергию*:

$$\dot{F}(i_1 \ldots i_f) = \sum_k h(i_1 \ldots i_f;\ k_1 \ldots k_f)\, F(k_1 \ldots k_f).$$

Если все частицы подобны, то $H$ будет бисимметричным в нашем смысле, и потому между различными подпространствами тензорного пространства, инвариантными относительно алгебры $\mathfrak{A}_f$, невозможны никакие переходы во времени, *каковы бы ни были силы взаимодействия между частицами.* Решающую роль в квантовой механике играет не столько группа преобразований $\Pi_f(A)$, сколько алгебра $\mathfrak{A}_f$.

Теперь уже должно быть совершенно очевидно, какой *общей проблемой* охватывается наш вопрос, относящийся к тензорам: группа $\pi_f$ заменяется произвольной конечной группой $\gamma$, тензорное пространство — любым векторным пространством, общий вектор которого мы обозначим через $f$, а размерность — через $n$, операторы $F \longrightarrow sF$ — любым представлением $\mathfrak{S}$ заданной группы $\gamma$ в этом векторном пространстве, и, наконец, $\mathfrak{A}_f$ — коммутаторной алгеброй представления $\mathfrak{S}$. *Мы установим полную взаимность между регулярным представлением группового кольца* $\mathfrak{r}$ *группы* $\gamma$ *и коммутаторной алгеброй заданного представления.* Повторим более подробно: $\gamma$ есть конечная группа порядка $h$, $s$ означает общий ее элемент, $\mathfrak{r}$ есть соответствующее групповое кольцо, образованное величинами (6.6). Пусть задано представление группы $\gamma$ в $n$-мерном векторном пространстве $P$: $s \longrightarrow U(s) = \| u_{ik}(s) \|$,

$$(6.9) \quad f'_i = \sum_k u_{ik}(s) f_k \quad (i, k = 1, \ldots, n) \quad \text{или} \quad f' = U(s) f.$$

Мы сокращенно записываем (6.9) в виде $f' = sf$ и распространяем это представление на групповое кольцо:

$$f \longrightarrow f' = \sum_s a(s)\, sf = af \quad \text{представляет} \quad \sum a(s)\, s = a.$$

Линейные операторы $a$ образуют алгебру $\mathfrak{S}$, гомоморфную групповому кольцу. $\mathfrak{A}$ есть коммутаторная алгебра заданного представления или алгебры $\mathfrak{S}$; элементы алгебры $\mathfrak{A}$ мы будем теперь обозначать через $A = \| a_{ik} \|$. Таким образом из

$$(6.10) \qquad \bar{f} = Af, \qquad \bar{f}_i = \sum_k a_{ik} f_k$$

при $A \in \mathfrak{A}$ следует, что

$$(6.11) \qquad s\bar{f} = Asf \quad \text{или} \quad s\bar{f}_i = \sum_k a_{ik} s f_k.$$

Групповое кольцо есть $h$-мерное векторное пространство $\rho$, рассматриваемое как поле действия регулярного представления $(\mathfrak{r})$

алгебры $\mathfrak{r}$, сопоставляющего величине $a$ подстановку

$$(a):\quad x \longrightarrow ax$$

в $\rho$, наше же векторное пространство $P$ будет рассматриваться как поле действия матриц из $\mathfrak{A}$ (а не $\mathfrak{S}$); соответственно следует понимать инвариантность, неприводимость, эквивалентность и т. п.

Первым делом покажем, что *регулярное представление группового кольца* $\mathfrak{r}$ *вполне приводимо*, причем это справедливо при любом основном поле $k$*). После этого мы могли бы выбрать следующий путь: теорема (III.3.D) и ее доказательство показывают, как разложить $\mathfrak{S}$ на неприводимые части, а тогда общая теорема (III.5.B) обеспечивает полную приводимость коммутаторной алгебры $\mathfrak{A}$. Однако мы установим здесь гораздо более полный и прямой параллелизм между ($\mathfrak{r}$) и $\mathfrak{A}$, без посредства $\mathfrak{S}$ и притом гораздо более элементарным методом, который также можно вычитать из нашего специального случая тензоров $F$.

Как мы предлагали выделять инвариантное подпространство в тензорном пространстве $P_f$? — Наложением на $F$ некоторого числа условий симметрии (6.4). Эти условия выражают, что „величина“ с коэффициентами $F(s) = sF$ находится в некотором линейном подпространстве $\sigma$ пространства $\rho$. Читатель, не желающий оперировать с величинами, коэффициентами которых служат не числа, а тензоры, может потребовать, чтобы в указанном подпространстве лежала каждая величина $x$ с коэффициентами

$$x(s) = sF(i_1 \ldots i_f)$$

при произвольных фиксированных $i_1, \ldots, i_f$. Переход от этого замечания к нашей общей проблеме приводит к следующему исходному пункту дальнейших рассмотрений.

Пусть $f$ — вектор; через $f_i(\cdot)$ мы будем обозначать величину с коэффициентами

$$f_i(s) = sf_i = \sum_k u_{ik}(s) f_k; \tag{6.12}$$

---

*) Это останется справедливым, даже если $k$ имеет характеристику $p \neq 0$, в предположении, что $p$ не является делителем порядка $h$ группы $\gamma$. Заметим, что раздел A этой главы сохраняет силу для полей любой характеристики, а раздел B — для полей характеристики $p$, не делящей $h$.

$f(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))$ можно рассматривать как вектор, компонентами которого служат не числа, а величины. Каждое подпространство $\sigma$ в $\rho$ следующим образом определяет подпространство $\Sigma = \sharp\sigma$ векторного пространства $P$: *вектор $f$ принадлежит $\Sigma$ в том и только в том случае, если каждая из $n$ величин $f_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, n)$ лежит в $\sigma$.* То, что построенное так $\Sigma$ есть инвариантное подпространство пространства $P$ (инвариантное относительно алгебры $\mathfrak{A}$), — почти тривиально. Нашей главной целью является установить справедливость обратного утверждения, т. е. что каждое инвариантное $\Sigma$ имеет вид $\sharp\sigma$. Естественным способом достижения этой цели является построение $\sigma$ по $\Sigma$, и совершенно ясно, как это сделать. Пусть $\Sigma$ — любое подпространство пространства $P$; *определяем $\sigma = \natural\Sigma$ как линейную оболочку всех величин вида $f_i(\cdot)$ $(f \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, n)$.* Более подробно: если $f^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ — базис подпространства $\Sigma$, то соответствующее $\natural\Sigma$ состоит из всех величин вида

$$x = \sum_{i,\alpha} \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot) \tag{6.13}$$

с произвольными коэффициентами $\varphi_i^{(\alpha)}$. Опять-таки почти тривиально, что такое $\sigma = \natural\Sigma$ инвариантно и является, кроме того, подпространством пространства

$$\rho_0 = \natural P \tag{6.14}$$

(не обязательно совпадающего со всем пространством $\rho$). *При этих ограничениях — что $\Sigma$ инвариантно в $P$ и $\sigma$ инвариантно в $\rho_0$ — мы покажем, что операции $\sharp$ и $\natural$ взаимно обратны.*

## 7. Полная приводимость группового кольца

Во исполнение программы, намеченной в последнем параграфе, прежде всего докажем, что регулярное представление $(\mathfrak{r})$ группового кольца $\mathfrak{r}$ вполне приводимо[5].

Теорема (III.7.A). *Инвариантное подпространство $\sigma$ пространства $\rho$ обладает идемпотентным производящим элементом $e$; т. е. $xe$ лежит в $\sigma$ для каждого $x$, и $xe = x$ для каждого $x$ из $\sigma$.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что $e = 1e$ содержится в $\sigma$ и потому $ee = e$.

Линейное преобразование $x \to y$, переводящее каждый „вектор“ $x$ в некоторый вектор $y$ из $\sigma$ и оставляющее векторы $x$

из $\sigma$ неизменными, мы будем, естественно, называть *проектированием* $\rho$ на $\sigma$. Такое проектирование на произвольное линейное подпространство $\sigma$ размерности $g$ строится достаточно просто: беря какую-нибудь систему координат $e_1, \ldots, e_g; e_{g+1}, \ldots, e_h$, приуроченную к подпространству $\sigma$, полагаем по определению

$$e_1 \longrightarrow e_1, \ \ldots, \ e_g \longrightarrow e_g; \ e_{g+1} \longrightarrow 0, \ \ldots, \ e_h \longrightarrow 0.$$

Нам нужно доказать существование проектирования специального вида

$$x \longrightarrow y = xe,$$

в предположении, что $\sigma$ — *инвариантное* подпространство.

Мы начнем с произвольного проектирования $x \longrightarrow y$:

$$y(s) = \sum_t d(s, t)\, x(t), \qquad y = Dx.$$

Вследствие инвариантности подпространства $\sigma$, формула

$$rz = Drx$$

снова определяет некоторое проектирование $x \longrightarrow z$, какой бы элемент группы ни взять в качестве $r$; это проектирование записывается в явном виде так:

$$z(r^{-1}s) = \sum_t d(s, t)\, x(r^{-1}t)$$

или

$$z(s) = \sum_t d(rs, rt)\, x(t).$$

Образовав „среднее“ всех наших проектирований

$$e(s, t) = \frac{1}{h} \sum_r d(rs, rt),$$

мы снова получим проектирование; его матрица $e(s, t)$ удовлетворяет соотношению

$$e(rs, rt) = e(s, t)$$

и потому имеет вид $e(t^{-1}s)$. Следовательно, наше новое проектирование и есть проектирование требуемого вида,

$$y(s) = \sum_t x(t)\, e(t^{-1}s) \quad \text{или} \quad y = xe.$$

Теорема (III.7.B). *Инвариантное подпространство $\sigma$, содержащее инвариантное подпространство $\sigma_1 \subset \sigma$, можно* *расщепить на $\sigma_1$ и дополнительное инвариантное подпространство $\sigma'$: $\sigma = \sigma_1 + \sigma'$.*

Доказательство следует схеме, уже использованной в доказательстве теоремы (III.3.С). Пусть $e_1$ — производящий идемпотент подпространства $\sigma_1$. Те $x$ из $\sigma$, для которых $xe_1 = x$, образуют инвариантное подпространство $\sigma_1$, те, для которых $xe_1 = 0$, образуют также инвариантное подпространство $\sigma'$. Разложение Пирса дает $\sigma = \sigma_1 + \sigma'$.

Если инвариантное подпространство $\sigma$ разложено на несколько линейно независимых инвариантных подпространств,

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_u,$$

то имеем для каждого элемента $x$ из $\sigma$ единственное разложенне

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_u \qquad (x_\alpha \in \sigma_\alpha); \tag{7.1}$$

в частности, для производящего идемпотента $e$ подпространства $\sigma$ имеем

$$e = e_1 + e_2 + \ldots + e_u \qquad (e_\alpha \in \sigma_\alpha). \tag{7.2}$$

Из (7.2) следует, что, для любого $x$ из $\sigma$,

$$x = xe = xe_1 + xe_2 + \ldots + xe_u. \tag{7.3}$$

Так как $xe_\alpha$ (как и $e_\alpha$), в силу инвариантности подпространства $\sigma_\alpha$, лежит в $\sigma_\alpha$, (7.3) совпадает с разложением (7.1), которое, таким образом, оказывается непосредственным следствием разложения (7.2). Применяя наше замечание к $x = e_\alpha$, видим, что

$$e_\alpha e_\beta = \begin{cases} e_\alpha, & \text{если } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{если } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Такие величины $e_\alpha$ будем называть *взаимно нормальными идемпотентами*. Идемпотент $e$ неразложим или *примитивен*, если он не допускает никакого разложения $e = e_1 + e_2$ на два взаимно нормальных идемпотента $e_1$, $e_2$, кроме тривиальных разложений $e = e + 0$ и $e = 0 + e$. Производя расщепление, пока это будет возможно, мы придем в конце концов к расщеплению заданного идемпотента $e$ на взаимно нормальные примитивные идемпотенты. Действительно, если $e_1$ допускает дальнейшее расщепление,

$$e_1 = e_1' + e_1''; \qquad \begin{matrix} e_1' e_1' = e_1', & e_1' e_1'' = 0, \\ e_1'' e_1' = 0, & e_1'' e_1'' = e_1', \end{matrix}$$

то для $a > 1$ имеем

$$e'_1 e_\alpha = e'_1 e_1 e_\alpha = 0, \qquad e_\alpha e'_1 = e_\alpha e_1 e'_1 = 0;$$

поэтому последовательность $e'_1, e''_1; e_2, \dots$ снова состоит из взаимно нормальных идемпотентов. Наш анализ показывает, что разложение единицы 1 на взаимно нормальные примитивные идемпотенты приводит к расщеплению всего $\rho$ на неприводимые инвариантные подпространства.

Обратимся теперь к ситуации, к которой относилась лемма (III.1.D), с тем, чтобы выяснить общую идею подобия или эквивалентности. Мы имеем два множества матриц, $A_1(a)$ и $A_2(a)$, связанных некоторым соответствием с параметром $a$, пробегающим какое-то абстрактное множество. $\mathrm{P}_1$ и $\mathrm{P}_2$ суть два векторных пространства размерностей $g_1$ и $g_2$, векторы которых подвергаются соответственно преобразованиям $A_1(a)$ и $A_2(a)$. Под равенствами $\mathfrak{y}_1 = a\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_2 = a\mathfrak{x}_2$ для векторов $\mathfrak{x}_1$ из $\mathrm{P}_1$ и $\mathfrak{x}_2$ из $\mathrm{P}_2$ понимается, что $\mathfrak{y}_1 = A_1(a)\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_2 = A_2(a)\mathfrak{x}_2$. Пусть $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ — инвариантные подпространства, соответственно, в $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$. Линейное отображение $\mathfrak{x}_2 \to \mathfrak{x}_1$, сопоставляющее произвольному вектору $\mathfrak{x}_2$ из $\Sigma_2$ некоторый вектор $\mathfrak{x}_1$ из $\Sigma_1$, называется *отображением подобия* $\Sigma_2$ на $\Sigma_1$, если оно переводит $a\mathfrak{x}_2$ в $a\mathfrak{x}_1$ (для любого $a$). $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ *подобны* или *эквивалентны*, если существует *взаимно однозначное* отображение подобия $\mathfrak{x}_2 \rightleftarrows \mathfrak{x}_1$ $\Sigma_2$ на $\Sigma_1$. В частности, $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ могут быть подпространствами одного и того же векторного пространства $\mathrm{P}$, являющегося полем действия совокупности преобразований $A(a)$.

Теорема (III.7.C). *Отображение подобия $D$: $x \to x'$ инвариантного подпространства $\sigma$ на $\sigma'$ порождается умножением справа на некоторое $b$: $x' = xb$.*

Доказательство. Обозначим через $b$ величину, в которую переводится отображением $D$ производящий идемпотент $e$ подпространства $\sigma$. Так как $D$ — отображение подобия, то оно будет переводить $xe$ в $xb$, каково бы ни было $x$; но $x = xe$, если $x$ принадлежит $\sigma$. — Это предложение и его доказательство представляют собой незначительную модификацию утверждения и доказательства теоремы (III.4.A).

По общей формуле $x' = xb$ образом $e$ будет $eb$; поэтому построенное здесь $b$ удовлетворяет соотношению $eb = b$ и кроме того, как величина из $\sigma'$, удовлетворяет еще соотношению $be' = b$, где $e'$ — производящий идемпотент подпространства $\sigma'$. Рассмотрим тот частный случай, когда $\sigma$ и $\sigma'$ эквивалентны и, значит, отображаются друг на друга с помощью взаимно однозначного соответствия подобия $x \rightleftarrows x'$. Это соответствие будет в одну сторону порождаться величиной $b$: $x' = xb$, удовлетворяющей указанным выше соотношениям, а в другую сторону — величиной $a$:

$$x = x'a, \tag{7.4}$$

удовлетворяющей аналогичным уравнениям:

$$ae = e'a = a; \quad be' = eb = b. \tag{7.5}$$

$e$ переводится прямым отображением в $b$, а последнее — обратным отображением в $ba$; следовательно,

$$ba = e \quad \text{и} \quad ab = e'. \tag{7.6}$$

Обратно, если $e$ и $e'$ — заданные идемпотенты и $a$, $b$ удовлетворяют уравнениям (7.5), (7.6), то формулы

$$x' = xb, \quad x = x'a$$

устанавливают взаимно однозначные отображения $x \longrightarrow x'$, $x' \longrightarrow x$ инвариантных подпространств $\sigma$, $\sigma'$, порожденных соответственно идемпотентами $e$, $e'$, друг на друга.

То, что мы несколько небрежно назвали инвариантными подпространствами, было бы, пожалуй, более точно назвать *левыми инвариантными подпространствами*, потому что операциями, относительно которых определена здесь инвариантность, являются *левые* умножения $(a)$: $x \longrightarrow ax$ на элементы $a$ из нашего кольца. Подпространство, инвариантное относительно правых умножений $(a)'$: $x \longrightarrow xa$, заслуживает наименования *правого инвариантного подпространства*. Тогда как первое имеет производящий идемпотент $e$ *справа*, в том смысле, что оно состоит из всех величин вида $xe$, последнее будет иметь производящий идемпотент *слева*. Доказательство можно было бы провести тем же способом. Однако существует общий метод свободного перехода слева направо. Если определить $\hat{a}$ формулой

$$\hat{a}(s) = a(s^{-1}) \quad \text{или} \quad \hat{a}(s^{-1}) = a(s),$$

то имеет место следующая лемма:

Лемма (III.7.D). *Из* $a = a_1 a_2$ *следует* $\hat{a} = \hat{a}_2 \hat{a}_1$.

Таким образом, покрытие „крышками“ переводит нашу алгебру $\mathfrak{r}$ в „инверсную“ алгебру $\mathfrak{r}'$. Если инвариантные подпространства, порожденные идемпотентами $e$, $e'$, эквивалентны, то это же верно и для $\hat{e}$, $\hat{e}'$; действительно, уравнения (7.5). (7.6) показывают, что $\hat{e}$, $\hat{e}'$ связаны друг с другом с помощью величин $\hat{a}$, $\hat{b}$ тем же способом, как $e$, $e'$ с помощью величин $b$, $a$. Поэтому представление, индуцируемое регулярным представлением в $\hat{\sigma}$, в смысле эквивалентности, однозначно определено представлением, индуцируемым в $\sigma$; здесь $\sigma$, $\hat{\sigma}$ обозначают подпространства, порожденные, соответственно, идемпотентами $e$ и $\hat{e}$. Вопрос о природе этого сопряжения разрешается следующей теоремой.

Теорема (III. 7. E). *Представления, индуцируемые регулярным представлением в $\sigma$ и $\hat{\sigma}$, контрагредиентны друг другу.*

Доказательство основывается на понятии *следа*: следом (английское trace) величины $a$: $a(s)$ называется ее единичная компонента $a(1) = \mathrm{tr}(a)$. След произведения двух переменных величин,

$$(7.7) \qquad \mathrm{tr}(xy) = \sum_s x(s)\, y(s^{-1}) = \sum_s x(s^{-1})\, y(s),$$

есть симметричная билинейная невырожденная форма в $\rho$: при заданном $a$ уравнение $\mathrm{tr}(xa) = 0$ не может тождественно удовлетворяться всеми $x$ за исключением того случая, когда $a = 0$.

Сравним левое и правое инвариантные подпространства $\sigma$ и $\tau$, состоящие соответственно из величин $xe$ и $ex$. Мы утверждаем, что форма $\mathrm{tr}(xy)$ не вырождается, когда $x$ и $y$ изменяются соответственно в $\sigma$ и $\tau$. Действительно, для произвольного элемента $z$ и элемента $a$ из $\sigma$ имеем

$$az = ae \cdot z = a \cdot ez = ay,$$

где $y = ez$ принадлежит $\tau$. Поэтому предположение $\mathrm{tr}(ay) = 0$ для всех $y$ из $\tau$ влечет за собой, что $\mathrm{tr}(az) = 0$ для всех вообще $z$, откуда $a = 0$. Аналогично доказывается наше утверждение и для второго множителя. Отнесем теперь $\sigma$ и $\tau$ к координатным системам $a_i$ и $b_k$ так, что

$$(7.8) \qquad x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_g a_g, \quad y = \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_{g'} b_{g'}$$

пробегают соответственно $\sigma$ и $\tau$, когда числа $\xi$ и $\eta$ независимо пробегают $k$. Из невырожденности формы $\mathrm{tr}(xy)$ для выражений (7.8) легко следует совпадение $g' = g$ размерностей подпространств $\sigma$ и $\tau$ и возможность приурочить систему координат $b_k$ в $\tau$ к произвольно выбранной системе координат $a_i$ в $\sigma$ так, чтобы

$$(7.9) \qquad \mathrm{tr}(xy) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_g\eta_g$$

для $x$ из $\sigma$ и $y$ из $\tau$.

Когда $y$ изменяется в $\tau$, $\hat{y}$ принимает значения из $\hat{\sigma}$. Одновременное выполнение подстановок

$$x \longrightarrow sx \quad (x \in \sigma), \qquad y \longrightarrow ys^{-1} \quad (y \in \tau)$$

или

(7.10) $$x \longrightarrow sx \quad (x \in \sigma), \qquad \hat{y} \longrightarrow s\hat{y} \quad (\hat{y} \in \hat{\sigma})$$

оставляет (7.9) неизменным:

(7.11) $$\operatorname{tr}(sas^{-1}) = \operatorname{tr}(a), \qquad \operatorname{tr}(sxys^{-1}) = \operatorname{tr}(xy).$$

Следовательно, будучи выражены в выбранных системах координат, подстановки (7.10) контрагредиентны.

Наше последнее замечание будет относиться к *характеру* $\chi(s)$ представления, индуцированного в $\sigma$ регулярным представлением группового кольца $\mathfrak{r}$. Надо вычислить след $\sum_s a(s)\chi(s)$ линейной подстановки

(7.12) $$x \longrightarrow y = ax \qquad\qquad (x \in \sigma).$$

Если мы приурочим систему координат $e_1, \ldots, e_g; e_{g+1}, \ldots, e_h$ к $g$-мерному подпространству $\sigma$, то сразу увидим, что подстановка

(7.13) $$x \longrightarrow y = axe \qquad\qquad (x \in \rho)$$

имеет матрицу

$$\left|\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & 0 \end{array}\right|,$$

где левый верхний квадрат занят матрицей подстановки (7.12). Это позволяет вычислить след подстановки (7.12) или

$$y(s) = \sum a(t)\,x(r)\,e(t') \qquad\qquad (trt' = s),$$

который оказывается равным

$$\sum_{tst'=s} a(t)\,e(t') = \sum_{s,\,t} a(t)\,e(s^{-1}t^{-1}s) = \sum_t a(t)\,\chi(t).$$

Отсюда, переставляя буквы $s$ и $t$, имеем

(7.14) $$\chi(s) = \sum_t e(t^{-1}s^{-1}t).$$

Функцию $a(s)$ называют *функцией классов*, если для элементов $s$ одного и того же класса, т. е. сопряженных элементов, как $s$ и $t^{-1}st$, она принимает одинаковые значения:

$$a(t^{-1}st) = a(s). \tag{7.15}$$

В этом смысле характер $\chi(s)$ любого представления $s \longrightarrow U(s)$ является функцией классов, поскольку

$$U(t^{-1}st) = U^{-1}(t) \cdot U(s) \cdot U(t)$$

имеет тот же след, что и $U(s)$. Формула (7.14) делает это очевидным для наших представлений, содержащихся в регулярном. $a(s)$ есть функция классов в том и только в том случае, когда величина $a$ принадлежит центру группового кольца. Действительно, из $ax = xa$ или

$$\sum_t a(st)\, x(t^{-1}) = \sum_t x(t^{-1}) a(ts) \tag{7.16}$$

обратно следует (7.15),

$$a(st) = a(ts),$$

если приравнять коэффициенты в обеих частях формулы (7.16).

## 8. Формальные леммы

После того как мы разрешили себе войти во все эти детали, относящиеся к конечным группам и их групповым кольцам и частично не нужные для нашей непосредственной цели, настало время вернуться к проблеме, сформулированной в конце шестого параграфа. В основу доказательства полной взаимности между регулярным представлением $(\mathfrak{r})$ группового кольца $\mathfrak{r}$ и коммутаторной алгеброй $\mathfrak{A}$ мы положим три простые леммы[6].

Лемма (III.8.A).

$$a \cdot f_i(\cdot) = \sum_k a_{ik} f_k(\cdot) \tag{8.1}$$

с

$$\|a_{ik}\| = \sum_s a(s)\, U^{-1}(s). \tag{8.2}$$

Доказательство. $af(\cdot)$ имеет $s$-коэффициентом вектор

$$g(s) = \sum_r a(r)\, r^{-1} s f = \sum_r a(r)\, U^{-1}(r) f(s).$$

Лемма (III.8.B). $f_i(\cdot)\, a = g_i(\cdot)$, *где вектор* $g$ *определен формулой*

$$g = \sum_r a(r^{-1})\, r f = \hat{a} f.$$

*Другими словами, если* $g=\hat{a}f$, *то* $g(\cdot)=f(\cdot)\bar{a}$.

Доказательство. $f_i(\cdot)a=x$ действительно задается формулой

$$x(s)=\sum_r srf_ia(r^{-1})=sg_i.$$

Лемма (III.8.C). *Равенство вида*

$$\hat{a}(s)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\cdot sf_i=\varphi U(s)f, \tag{8.3}$$

*где* $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *рассматривается как строка, а не столбец (контравариантный вектор), влечет за собой*

$$a(s)=\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot s\varphi_i, \tag{8.4}$$

*где* $s\varphi=\varphi(s)$ *определяется, как строка* $\varphi U^{-1}(s)$. *Линейное преобразование*

$$\|a_{ik}\|=\left\|\sum_s sf_i\cdot s\varphi_k\right\|, \tag{8.5}$$

*т. е.*

$$A=\sum_s U(s)f\varphi U^{-1}(s) \tag{8.6}$$

*перестановочно с операторами* $s$.

Доказательство. (8.4) или

$$a(s)=\varphi U^{-1}(s)f$$

сразу следует из (8.3), так как $U^{-1}(s)=U(s^{-1})$. Кроме того,

$$U(t)AU^{-1}(t)=\sum_s U(ts)t\varphi U^{-1}(ts)=A.$$

## 9. Взаимность между групповым кольцом и коммутаторной алгеброй

Если $A=\|a_{ik}\|$ принадлежит коммутаторной алгебре, то из соотношения

$$\bar{f}_i=\sum_k a_{ik}f_k \tag{9.1}$$

в силу (6.11) следует

$$\bar{f}_i(\cdot)=\sum_k a_{ik}f_k(\cdot), \tag{9.2}$$

Это замечание показывает, что $\sharp\sigma$ инвариантно: одновременно с $f$ также $\bar{f}=Af$ содержится в $\sharp\sigma$, потому что если величины $f_k(\cdot)$ лежат в $\sigma$, то это же верно и для величин $\bar{f}_l(\cdot)$, определяемых формулой (9.2). С другой стороны, в силу леммы (III.8.A), $\natural\Sigma$ инвариантно для любого линейного подпространства $\Sigma$ из $\mathrm{P}$: $a_{\cdot}\cdot f_l(\cdot)$ есть линейная комбинация величин $f_k(\cdot)$ для любого вектора $f$ из $\Sigma$. Далее, по определению имеем

$$\natural\sharp\sigma\subset\sigma,\qquad \Sigma\subset\sharp\natural\Sigma.$$

Нашей целью является замена в этих соотношениях, в случае инвариантных $\Sigma\subset\mathrm{P}$ и $\sigma\subset\rho_0$, включения $\subset$ равенством $=$. В соответствии с этим мы выразим полную взаимность между $\rho_0$ и $\mathrm{P}$, устанавливаемую операциями $\sharp$ и $\natural$, в виде следующих двух теорем:

Теорема (III.9.A). *Пусть* $\sigma$ ($\sigma'$, $\sigma_1$, $\sigma_2$) — *произвольные инвариантные подпространства пространства* $\rho_0$ *и* $\Sigma=\sharp\sigma$; *тогда соотношения*

$$\sigma'\subset\sigma,\qquad \sigma=\sigma_1+\sigma_2,\qquad \sigma_1\sim\sigma_2$$

*влекут за собой, соответственно, соотношения*

$$\Sigma'\subset\Sigma,\qquad \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2,\qquad \Sigma_1\sim\Sigma_2;$$

*при этом, обратно,*

$$\sigma=\natural\Sigma.$$

Теорема (III.9.B). *Пусть* $\Sigma$ ($\Sigma'$, $\Sigma_1$, $\Sigma_2$) — *произвольные инвариантные подпространства пространства* $\mathrm{P}$ *и* $\sigma=\natural\Sigma$; *тогда*

$$\Sigma=\sharp\sigma,$$

*и соотношения*

$$\Sigma'\subset\Sigma,\qquad \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2,\qquad \Sigma_1\sim\Sigma_2$$

*влекут за собой, соответственно, соотношения*

$$\sigma'\subset\sigma,\qquad \sigma=\sigma_1+\sigma_2,\qquad \sigma_1\sim\sigma_2.$$

Прежде чем перейти к доказательствам этих теорем, сделаем следующее замечание. Если $\hat{e}$ — производящий идемпотент инвариантного $\sigma$, то соответствующее $\Sigma=\sharp\sigma$ состоит из всех векторов вида $ef$. Действительно, $g=ef$ лежит в $\Sigma$, потому что, в силу леммы (III.8.B), $g_l(\cdot)=f_l(\cdot)\,\hat{e}$, для каждого же $f$ из $\Sigma$ имеем $ef=f$, Для доказательства первой части теоремы (III.9.A) заметим, что равенство $\hat{e} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2$, получающееся в результате применения к производящему идемпотенту $\hat{e}$ подпространства $\sigma$ разложения $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, приводит к следующему разложению $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ для $\Sigma = \sharp\sigma$:

$$f = ef = e_1 f + e_2 f = f^{(1)} + f^{(2)}. \qquad (f \in \Sigma)$$

Лемма (III.7.D) позволяет убрать все крышки в соотношениях

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \hat{e}_1 = 0 \qquad (\hat{e}_1 \hat{e}_1 = \hat{e}_1,\ \hat{e}_2 \hat{e}_2 = \hat{e}_2),$$

что обеспечивает независимость составляющих $\Sigma_1$, $\Sigma_2$:

$$e_1 f^{(2)} = 0, \quad e_2 f^{(1)} = 0.$$

Соответствие подобия $x_1 \rightleftarrows x_2$ между $\sigma_1$ и $\sigma_2$, определяемое формулами

$$x_2 = x_1 \hat{b}, \quad x_1 = x_2 \hat{a},$$

порождает взаимно обратные преобразования

$$f^{(2)} = b f^{(1)}, \quad f^{(1)} = a f^{(2)}$$

между векторами $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ из $\Sigma_1 = \sharp\sigma_1$ и $\Sigma_2 = \sharp\sigma_2$. В силу (6.11) этими формулами устанавливается соответствие подобия:

$$\text{из } f^{(1)}_* = A f^{(1)} \text{ следует } b f^{(1)}_* = A(b f^{(1)}) \qquad \{A \in \mathfrak{A}\}.$$

Для доказательства второй части теоремы (III.9.A), т. е. соотношения $\sigma \subset \natural\Sigma$, мы построим $\natural\Sigma$ с помощью производящего идемпотента $\hat{e}$ подпространства $\sigma$ следующим образом. Пусть векторы $g^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ образуют базис всего векторного пространства $P$. Так как все $f^{(\alpha)} = e g^{(\alpha)}$ лежат в $\Sigma = \sharp\sigma$, то

$$y = \sum_{\alpha, i} \varphi_i^{(\alpha)} \cdot f_i^{(\alpha)} (\cdot)$$

лежит в $\natural\Sigma$. Вводя

$$x = \sum_{\alpha, i} \varphi_i^{(\alpha)} g_i^{(\alpha)} (\cdot),$$

имеем $y = x\hat{e}$. Таким образом, $x\hat{e}$ лежит в $\natural\Sigma$, если $x$ лежит в $\rho_0 = \natural P$. Но каждое $x$ из $\sigma$ удовлетворяет обоим условиям: $x \in \rho_0$ и $x\hat{e} = x$.

Обратная теорема (III.9.B) устанавливает существенно важные факты. Ее утверждение, что

(9.3) $\qquad$ из $\sigma = \natural\Sigma$ следует $\Sigma = \sharp\sigma$

для любого подпространства $\Sigma$, инвариантного относительно $\mathfrak{A}$, является становым хребтом всей теории. Пусть $\hat{e}$ — производящий идемпотент подпространства $\sigma = \natural\Sigma$. Как и всякий элемент из $\sigma$, он имеет вид

$$\hat{e}(s) = \sum_{\alpha, i} \varphi_i^{(\alpha)} \cdot s f_i^{(\alpha)},$$

где

$$f^{(\alpha)} = (f_1^{(\alpha)}, \ldots, f_n^{(\alpha)})$$

— векторы, образующие базис для $\Sigma$. Поэтому, в силу леммы (III.8.C),

$$e(s) = \sum_{\alpha, k} s \varphi_k^{(\alpha)} \cdot f_k^{(\alpha)},$$

и всякий вектор $g = ef$ из $\sharp\sigma$ задается формулой

(9.4) $$g_i = \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{k} a_{ik}^{(\alpha)} f_k^{(\alpha)} \right\} = \sum_{\alpha} g_i^{(\alpha)},$$

где

$$a_{ik}^{(\alpha)} = \sum_{s} s f_i \cdot s \varphi_k^{(\alpha)}.$$

Каждое слагаемое $g^{(\alpha)}$ суммы (9.4), $g = \sum\limits_{\alpha} g^{(\alpha)}$, получается из $f^{(\alpha)}$ с помощью линейного преобразования $A^{(\alpha)} = \| a_{ik}^{(\alpha)} \|$, которое, в силу той же леммы (III.8.C), перестановочно со всеми $s$. Поэтому $\Sigma$, будучи инвариантным относительно преобразований $A$ из коммутаторной алгебры $\mathfrak{A}$, вместе с $f^{(\alpha)}$ содержит и $g^{(\alpha)}$. Этим и доказано наше утверждение: $g \in \Sigma$ или $\sharp\sigma \subset \Sigma$.

Из *разложения* $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ по определению следует, что каждое $x$ из $\sigma = \natural\Sigma$ может быть записано в виде суммы $x_1 + x_2$, где $x_1 \in \sigma_1 = \natural\Sigma_1$, $x_2 \in \sigma_2 = \natural\Sigma_2$. Остается доказать, что $\sigma_1$ и $\sigma_2$ линейно независимы, или что пересечение $\sigma^* = \sigma_1 \cap \sigma_2$ пусто, если пусто пересечение $\Sigma^* = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Но в силу уже доказанной части теоремы (III.9.B),

$$\sharp\sigma^* \subset \sharp\sigma_1 = \Sigma_1, \quad \sharp\sigma^* \subset \Sigma_2;$$

поэтому $\sharp\sigma^* \subset \Sigma^*$ и, согласно последней части теоремы (III.9.A), $\sigma^* \subset \natural\Sigma^*$.

*Переход от* $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ *к* $\sigma_1 \sim \sigma_2$, где $\sigma_1 = \natural\Sigma_1$, $\sigma_2 = \natural\Sigma_2$, будет основываться на следующем утверждении, доказательство которого содержится в лемме (III.8.B):

Лемма (III.9.С). $\rho_0$ *как лево-, так и правоинвариантно.* В силу этого, $\rho_0$ обладает левым производящим идемпотентом $i$: $i \in \rho_0$, $ix = x$ для всех $x \in \rho_0$.

Пусть векторы $f^{(\alpha)}$ образуют базис подпространства $\Sigma_1$ и пусть заданное отображение подобия $\Sigma_1$ на $\Sigma_2$ переводит $f^{(\alpha)}$ в $g^{(\alpha)}$. Если мы положим

$$x = \sum_{\alpha, i} \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot), \quad y = \sum_{\alpha, i} \varphi_i^{(\alpha)} g_i^{(\alpha)}(\cdot)$$

$\{\varphi_i^{(\alpha)}$ — произвольные числа$\}$, то соответствие $x \longrightarrow y$ между $x$ и $y$ с одними и теми же коэффициентами $\varphi_i^{(\alpha)}$ будет определять отображение подобия подпространства $\sigma_1 = \natural\Sigma_1$ на $\sigma_2 = \natural\Sigma_2$, так как, в силу леммы (III.8.A), имеем

$$ax = \sum_{\alpha, k} \psi_k^{(\alpha)} f_k^{(\alpha)}(\cdot), \quad ay = \sum_{\alpha, k} \psi_k^{(\alpha)} g_k^{(\alpha)}(\cdot), \quad \text{с} \quad \psi_k^{(\alpha)} = \sum_i \varphi_i^{(\alpha)} a_{ik}.$$

Однако это определение соответствия $x \longrightarrow y$ правомерно лишь, *если из* $x = 0$ *следует* $y = 0$. Докажем сперва, что

$$\text{из} \quad \hat{x}f = 0 \quad \text{следует} \quad \hat{y}f = 0$$

(для любого вектора $f$). В силу леммы (III.8.C), вектор $F = \hat{x}f$ есть сумма членов $F^{(\alpha)}$, получающихся из соответствующих $f^{(\alpha)}$ с помощью преобразования

$$A^{(\alpha)} = \| a_{ik}^{(\alpha)} \| = \left\| \sum_s s f_i \cdot s\varphi_k^{(\alpha)} \right\|.$$

Так как преобразования $A^{(\alpha)}$ принадлежат коммутаторной алгебре $\mathfrak{A}$, то заданное отображение подобия $\Sigma_1$ на $\Sigma_2$ переводит $F^{(\alpha)}$ в соответствующую часть $G^{(\alpha)}$ вектора $G = \hat{y}f$ и потому $F$ в $G$. Следовательно, $F = 0$ влечет за собой $G = 0$ и, в частности: если числа $\varphi_i^{(\alpha)}$ удовлетворяют уравнению $x = 0$, то мы должны иметь $\hat{y}f = 0$ или, по лемме (III.8.B), $f_i(\cdot) y = 0$ для каждого вектора $f$. Поэтому данное $y$ удовлетворяет условию $zy = 0$ для каждого $z$ из $\rho_0$, и в частности для $z = i$. Но так как $y$ само лежит в $\rho_0$, то полученное равенство $iy = 0$ и доставляет требуемый результат: $y = 0$.

Полная взаимность, установленная теоремами (III.9.A) и (III.9.B), включает тот факт, что операция $\sharp$ переводит не только $\sigma = 0$ в $\sharp\sigma = 0$ и *часть* $\sigma' \subset \sigma$ в *часть* $\sharp\sigma' \subset \sharp\sigma$, но также всякое $\sigma \neq 0$ в $\sharp\sigma \neq 0$ и *собственную* часть в *собственную* часть, предполагая, что рассматриваемые $\sigma$ суть инвариантные подпространства пространства $\rho_0$. *Разложение пространства $\rho_0$ на неприводимо инвариантные подпространства $\sigma_\alpha$ приводит к разложению пространства $\mathrm{P}$ на подпространства $\Sigma_\alpha = e_\alpha \mathrm{P}$, неприводимо инвариантные относительно алгебры $\mathfrak{A}$; при этом оба разложения совершенно параллельны, вплоть даже до сохранения эквивалентностей.*

Заметим в дополнение, что любое инвариантное подпространство $\Sigma$ пространства $\mathrm{P}$ разбивается на неприводимо инвариантные подпространства, каждое из которых подобно одной из рассмотренных выше частей $\Sigma_\alpha$ пространства $\mathrm{P}$. Это справедливо для любого векторного пространства, вполне приводимого относительно некоторого множества линейных преобразований. Но доказательство особенно просто в данном случае. Действительно, пусть $e$ — производящий идемпотент подпространства $\Sigma$. Из разложения $\mathrm{P} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots$ или

$$f = \sum_\alpha f_\alpha \qquad (f_\alpha \in \Sigma_\alpha)$$

вытекает равенство

$$ef = \sum_\alpha ef_\alpha.$$

Так как $\Sigma_\alpha$ неприводимо, то отображение $f_\alpha \to ef_\alpha$ либо переводит каждый вектор $f_\alpha$ подпространства $\Sigma_\alpha$ в нуль, либо представляет собой взаимно однозначное отображение подобия $\Sigma_\alpha$ на некоторое подпространство в $\Sigma$.

Теорема (III.9.D). *Пространство $\mathrm{P}$ разбивается на неприводимые части $\Sigma_\alpha = e_\alpha \mathrm{P}$. Любое инвариантное подпространство $\Sigma$ пространства $\mathrm{P}$ разлагается на неприводимые части, каждая из которых подобна одному из $e_\alpha \mathrm{P}$.*

Для полной оценки изложенного метода (II) сравним его с методом (I), упомянутым в § 6, состоящим в переходе от $\mathfrak{r}$ к $\mathfrak{S}$ посредством теоремы (III.3.D) и от $\mathfrak{S}$ к $\mathfrak{A}$ посредством теоремы (III.5.B), пользуясь построениями, данными в доказательствах обоих этих предложений [7]. Эти построения зависят от выбора координатной системы в $\mathrm{P}$ и ни на одном из указанных двух шагов не проявляется такого полного параллелизма, какой обнаружен нами здесь. Совпадения между числами эквивалентных частей и не следует ожидать. В противоположность ограничению $\rho$ до $\rho_0$ в (II), метод (I) заменяет $\rho$ на его фактор-пространство по двусторонне инвариантному подпространству $\rho^0$, элементы которого $a$ удовлетворяют уравнению $af = 0$ тождественно для всех векторов $f$. Пробегая снова весь ход доказательства, можно сжато выразить суть метода (I) следующим образом. Единица 1 группового кольца $\mathfrak{r}$ (или, лучше, $\mathfrak{r} \bmod \rho^0$) разлагается на взаимно нормальные примитивные идемпотенты,

$$(9.5) \qquad 1 = e_1 + e_2 + \ldots;$$

тогда

$$(9.6) \qquad x = xe_1 + xe_2 + \ldots \quad \text{и} \quad f = e_1 f + e_2 f + \ldots$$

дают соответствующие разложения пространств $\rho$ и $P$ на неприводимо инвариантные подпространства (соответственно по отношению к $(\mathfrak{r})$ и $\mathfrak{A}$). Действительно, если алгебра $\mathfrak{S}$, которую теперь следует отождествить с $\mathfrak{B}$, записана в виде прямой суммы $v$ простых алгебр $\mathfrak{b}_u$ как в доказательстве теоремы (III.5.B), а элементы каждой из простых составляющих $\mathfrak{b}_u$ — как $s$-строчные матрицы

$$(9.7) \qquad \begin{Vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{s1} & \ldots & b_{ss} \end{Vmatrix}$$

$(s = s_u)$, элементы которых принадлежат алгебре с делением $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_u$, то мы получим примитивные идемпотенты $e_\alpha^{(u)}$, приравняв в (9.7) один из диагональных элементов $b_{\alpha\alpha}$ единице $e$ алгебры $\mathfrak{d}$, а все остальные элементы в (9.7), равно как и все вообще элементы других простых составляющих $\mathfrak{b}_{u'}$ $(u' \neq u)$ — нулю. Число членов в (9.5) равно $s_1 + \ldots + s_v$. Система координат в нашем векторном пространстве разбивается на части, различаемые тройками индексов

$$\overset{(u)}{i\alpha} \qquad [u = 1, \ldots, v; \quad i = 1, \ldots, t_u; \quad \alpha = 1, \ldots, s_u].$$

Векторы вида $e_1^{(1)} f$ суть те, у которых обращаются в нуль все компоненты, кроме компонент с индексами

$$\overset{(1)}{11}, \overset{(1)}{21}, \ldots, \overset{(1)}{t1} \qquad (t = t_1),$$

и эти векторы подвергаются под действием $\mathfrak{A}$ преобразованиям из неприводимой алгебры $\mathfrak{A}_1$:

$$A = \begin{Vmatrix} (a_{11}) & \ldots & (a_{1t}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{t1}) & \ldots & (a_{tt}) \end{Vmatrix} \qquad [a_{ik} \in \mathfrak{d}]$$

$\{\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1, t = t_1\}$.

Мы видим теперь, что существенная разница между методами (I) и (II) состоит в том, что в (I)

$$xe \text{ сопоставляется с } ef,$$

тогда как в (II)

$$x\hat{e} \text{ сопоставляется с } ef.$$

Лишь второй способ устанавливает соответствие, не зависящее от выбора производящего идемпотента $e$. Таким образом, можно сказать, что более полные результаты, достигаемые методом (II), возможны благодаря наличию в групповом кольце операции $\hat{}$, отсутствующей в произвольной (полупростой) алгебре [8].

## 10. Обобщение

Простейшие аксиомы проективной геометрии (включая аксиомы порядка и непрерывности) показывают, что проективное $(n-1)$-мерное пространство изоморфно следующей алгебраической модели: каждое отношение $n$ чисел заданного поля $k$,

$$f_1 : f_2 : \ldots : f_n$$

(за исключением $0 : 0 : \ldots : 0$) представляет *точку; прямая линия*, соединяющая две различных точки $a_i$ и $b_i$, задается параметрическим представлением

$$f_i = ua_i + vb_i$$

(где $u:v$ пробегает все пары из $k$ за исключением $0:0$). Для того чтобы поле $k$ было коммутативным, следует допустить в качестве аксиомы также некий частный случай теоремы Паскаля. Невырожденное линейное преобразование

$$f'_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} f_k, \quad f' = Uf, \tag{10.1}$$

представляет *коллинеацию*, т. е. отображение $f \longrightarrow f'$, при котором точки, лежащие на прямой линии, переходят снова в точки, лежащие на прямой линии. Возникает вопрос, является ли это наиболее общей коллинеацией. Все геометры считали, что ответ должен быть утвердительным, и это формулировалось как так называемая *основная теорема проективной геометрии:* каждая коллинеация, оставляющая неизменной проективную систему координат, есть тождество. При этом проективная система координат состоит из $n$ вершин

$$(1:0:0:\ldots:0), \quad (0:1:0:\ldots:0), \ldots, \quad (0:0:0:\ldots:1)$$

и „единичной точки“

$$(1:1:1:\ldots:1).$$

Приведенное утверждение действительно справедливо, если $k$ есть поле вещественных чисел, однако уже неверно для общего $k$ (неверно даже тогда, когда $k$ есть континуум всех комплексных чисел, в котором действует классическая алгебраическая геометрия). Действительно, любой *автоморфизм* $a \longrightarrow a^s$ поля $k$ порождает коллинеацию $f_i \longrightarrow f_i^s$, сохраняющую неизменной систему координат. (Автоморфизм поля есть взаимно однозначное отображение $a \longrightarrow a^s$ этого поля на себя, не нарушающее фундаментальных операций $+$ и $\times$:

$$(a+\beta)^s = a^s + \beta^s, \quad (a\beta)^s = a^s\beta^s,$$

и потому, в частности, переводящее 0 в 0 и 1 в 1.) *Основная теорема проективной геометрии в форме, годной при любом поле $k$, утверждает просто, что каждая коллинеация, сохраняющая систему координат, является в этом смысле автоморфизмом поля $k$.* Доказательство основывается на том факте, что понятия числа из $k$ и сложения и умножения в $k$ определяются геометрически в терминах фундаментальных понятий, входящих в проективные геометрические аксиомы. Наиболее общая коллинеация есть комбинация автоморфизма $a \longrightarrow a^s$ и линейной подстановки (10.1):

$$f'_i = \sum_k u_{ik} f_k^s, \quad f' = Uf^s. \tag{10.2}$$

В сравнении с этими „*полу-линейными*“ *подстановками*, линейные подстановки в собственном смысле, хотя и не вынужденные к полному отречению от престола, играют лишь второстепенную роль: они представляют *проективности*. Две $(n-1)$-мерные гиперплоскости, вложенные в проективное $n$-мерное пространство, можно отобразить одну на другую с помощью перспективы (центральной проекции). Проективность осуществляется любой цепью перспектив, возвращающейся в конце концов к исходной гиперплоскости и тем самым производящей некоторое коллинеарное отображение этой плоскости на себя; и именно этот тип коллинеации, реализуемый цепью перспектив в проективном пространстве большего числа измерений, соответствует линейным подстановкам без автоморфизмов.

В силу указанных обстоятельств представляется естественным обобщить теорию представлений конечной группы $\gamma$ так, чтобы включить полу-линейные преобразования. Поэтому мы примем, что с каждым элементом $s$ заданной конечной группы $\gamma$

сопоставлен автоморфизм поля $k$, обозначаемый через $a \longrightarrow a^s$, причем

$$(a^s)^t = a^{ts}.$$

Все представления, которые мы собираемся исследовать, основаны на этом соответствии, заданном раз навсегда; индивидуальное представление степени $n$ представляет $s$ полу-линейным оператором следующего типа:

$$f'_i = \sum_k u_{ik}(s) f^s_k, \quad f' = U(s) f^s. \tag{10.3}$$

Закон композиции читается теперь так:

$$U(st) = U(s) \cdot U^s(t).$$

Пользуясь для (10.3) снова сокращенной записью $f' = \boldsymbol{s}f$, мы относим величине $a = \sum a(s)\, s$ из группового кольца оператор

$$f \longrightarrow f' = \boldsymbol{a}f = \sum_s a(s) \cdot \boldsymbol{s}f. \tag{10.4}$$

Если умножение кольцевых элементов $a$ следует способу компонирования соответствующих операторов $\boldsymbol{a}$, то $c = ba$ должно задаваться формулой

$$c(s) = \sum_{tt' = s} b(t)\, a^t(t').$$

Этот закон определяет *модифицированное групповое кольцо* $\mathfrak{r}$, зависящее от того, какие автоморфизмы отнесены групповым элементам $s$.

Операторы (10.4), соответствующие всем величинам $a$ из этого группового кольца, образуют алгебру $\mathfrak{S}$, которую мы, правда, не решились бы назвать матричной алгеброй. Все *обыкновенные* линейные преобразования

$$\bar{f}_i = \sum_k a_{ik} f_k, \quad \bar{f} = Af,$$

перестановочные с $h$ операторами $f \longrightarrow \boldsymbol{s}f$, образуют множество $\mathfrak{A}$ матриц, которое мы снова назовем коммутаторной алгеброй, хотя это и не есть алгебра в строгом смысле, по крайней мере — не над $k$. $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно матричного сложения и умножения; однако, в принадлежности $aA$ к $\mathfrak{A}$ ($a$ — число, $A \in \mathfrak{A}$) мы можем быть уверены лишь, если $a$ есть самосопряженное число из $k$, т. е. число, удовлетворяющее условию $a^s = a$ для всех рассматриваемых автоморфизмов $s$. Самосопряженные числа образуют подполе $k_0$, над которым $k$ является относительным полем конечной степени $w$; автоморфизмы $s$ образуют группу Галуа поля $k$ над $k_0$. $\mathfrak{A}$ есть алгебра над $k_0$, и для многих целей было бы удобнее рассматривать в качестве основного поля не $k$, а $k_0$. Если воспользоваться базисом поля $k$ над $k_0$, то операторы $f \longrightarrow af$ из $\mathfrak{S}$ обратятся в обыкновенные линейные операторы над $k_0$ порядка $nw$.

Каковы бы ни были достоинства этой точки зрения, нет никакой нужды в том, чтобы принять ее, собираясь перенести теорию, изложенную в разделе В этой главы, на полулинейный случай. Все результаты остаются в полной силе, доказательства же требуют лишь тривиальных видоизменений. Операция $a \longrightarrow \hat{a}$ должна теперь определяться формулой

$$\hat{a}(s) = a^s(s^{-1}).$$

Что же касается следа, то форма $\mathrm{tr}(xy)$ не будет уже симметричной, и (7.11) заменится на

$$\mathrm{tr}(sxs^{-1}) = \mathrm{tr}^s(x).$$

Во всем дальнейшем нам нигде не встретится случая прибегнуть к полу-линейным преобразованиям. Тем не менее три причины побудили нас упомянуть это обобщение: во-первых, потому что это не стоило нам почти никакого труда; во-вторых, указанное обобщение, повидимому, доставляет естественную область применения метода (II); и, наконец, в-третьих, потому что полу-линейные преобразования выдвинулись на первый план в ряде современных исследований в различных областях алгебры[9].

## *ГЛАВА IV*

# СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА И ПОЛНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА

### 1. Представление конечной группы над алгебраически замкнутым полем

Следующим шагом в выполнении программы, намеченной в § 6 предыдущей главы, является прямое разложение регулярного представления *симметрической группы* $\pi_f$ на его неприводимые составляющие. Это построение, доставляя полную совокупность неэквивалентных неприводимых представлений группы $\pi_f$, вместе с тем протекает целиком в рамках поля $\varkappa$ рациональных чисел. Тем не менее получаются такие результаты, которые общей теорией обеспечиваются лишь при алгебраически замкнутом основном поле. Причина этого явления коренится в том, присущем симметрической группе, обстоятельстве, что неприводимые составляющие над $\varkappa$ оказываются абсолютно неприводимыми. Для полной оценки нашего прямого и элементарного построения считаем полезным вкратце напомнить читателю основные факты, относящиеся к представлениям конечной группы над алгебраически замкнутым полем $k$. Мы имеем в виду *ортогональность* и *полноту*.

1. Ортогональность. Пусть

$$s \to U(s) = \|u_{ik}(s)\| \quad \text{и} \quad V(s) = \|v_{pq}(s)\|$$

— два неприводимых представления соответственно степеней $g$ и $g'$ конечной группы $\gamma$ порядка $h$ ($i, k = 1, \ldots, g$; $p, q = 1, \ldots, g'$), и пусть $\|\hat{v}_{pq}(s)\| = \|v_{qp}(s^{-1})\|$ — матрица $\hat{V}$, контрагредиентная к $V$. Обозначая символом $\mathfrak{M}_s$ операцию усреднения $\frac{1}{h}\sum\limits_s$, имеем тогда (в предположении неэквивалентности рассматриваемых представлений)

$$\mathfrak{M}_s \{ u_{ik}(s) \hat{v}_{pq}(s) \} = 0, \tag{1.1}$$

в случае же $V(s) = U(s)$ усреднение дает:

$$(1.2) \qquad \mathfrak{M}_s \{u_{ik}(s)\hat{u}_{pq}(s)\} = \begin{cases} \frac{1}{g} & \text{для } p = i,\ q = k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

И. Шуру [1] принадлежит следующее простое доказательство. Образуем с помощью произвольной матрицы $B = \|b_{ip}\|$ из $g$ строк и $g'$ столбцов сумму

$$\sum_t U(t)\, B V^{-1}(t) = C,$$

распространенную на все групповые элементы $t$. Очевидно,

$$U(s)\, C V^{-1}(s) = C \quad \text{или} \quad U(s)\, C = C V(s).$$

Поэтому, в силу леммы (III.1.D), в случае неэквивалентности имеем $C = 0$: это и дает соотношения (1.1). Во втором случае, когда $V(s) = U(s)$, лемма (III.1.C) позволяет при алгебраически замкнутом поле $k$ заключить, что $C = \mu E$, где $\mu$ — число, которое должно линейно зависеть от произвольно выбранной нами матрицы

$$\mu = \sum_{k,q} \mu_{kq} b_{kq}.$$

Таким образом,

$$\sum_s \sum_{k,q} u_{ik}(s)\, b_{kq} \hat{u}_{pq}(s) = \delta_{ip} \sum_{k,q} \mu_{kq} b_{kq},$$

или

$$(1.3) \qquad \sum_s u_{ik}(s)\, \hat{u}_{pq}(s) = \delta_{ip} \mu_{kq}.$$

Но контрагредиентные матрицы $\|u_{ik}\|$ и $\|\hat{u}_{ik}\|$ связаны соотношениями

$$\sum_i u_{ik} \hat{u}_{iq} = \delta_{kq}.$$

Поэтому, полагая $p = i$ и суммируя по $i$, получаем

$$h\delta_{kq} = g\mu_{kq},$$

так что (1.3) приводится к (1.2).

Для характеров

$$\chi_u(s) = \sum_i u_{ii}(s), \quad \chi_v(s) = \sum_p v_{pp}(s)$$

получаем:

$$\mathfrak{M}_s\{\chi_u(s)\chi_v(s^{-1})\} = \begin{cases} 0, & \text{если представления неэквивалентны,}\\ 1, & \text{если представления эквивалентны.}\end{cases} \tag{1.4}$$

Из установленной ортогональности в качестве непосредственного следствия вытекает, что компоненты $u_{ik}(s)$, $v_{pq}(s)$, ... неэквивалентных неприводимых представлений группы $\gamma$, равно как и характеры $\chi_u(s)$, $\chi_v(s)$, ... этих представлений линейно независимы.

2. Полнота состоит в том, что указанные функции образуют полный линейный базис для всех функций или, соответственно, для всех функций классов. Иными словами: число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов в группе $\gamma$, а сумма квадратов их степеней $g^2 + g'^2 + \ldots$ равна ее порядку $h$. Тогда как ортогональность приписывает некоторое свойство любым двум заданным представлениям, доказательство полноты, очевидно, зависит от способа *построения* полной системы неэквивалентных неприводимых представлений. Но общим источником, из которого возникают все эти представления, как было обнаружено в главе III, является регулярное представление $(\mathfrak{r})$ группового кольца $\mathfrak{r}$, сопоставляющее каждому элементу

$$a = \sum_s a(s)\, s$$

этого кольца $\mathfrak{r}$ подстановку

$$(a)\colon\ x \longrightarrow y = ax \qquad (x \text{ пробегает } \mathfrak{r}). \tag{1.5}$$

Мы знаем из § 7 главы III, что $(\mathfrak{r})$ вполне приводимо и потому, в силу теоремы (III.5.B), является прямой суммой простых алгебр, каждая из которых есть полная матричная алгебра над некоторой алгеброй с делением над $k$. *Однако над алгебраически замкнутым полем $k$ не существует другой алгебры с делением, кроме самого $k$.* Это получается тем же рассуждением, которым мы специализировали лемму Шура для случая алгебраически замкнутого поля, доказав, что единственными коммутаторами в этом случае служат кратные единичной матрицы. Поэтому при надлежащем выборе базиса $e_{ik}$, $e'_{pq}$, ... общий элемент $a$ нашего группового кольца изображается некоторым набором матриц

$$\|a_{ik}\|,\ \|a'_{pq}\|,\ \ldots,$$

элементы которых $a_{ik}$, $a'_{pq}$, ... независимо пробегают все $k$:

(1.6)
$$a = \sum a_{ik}e_{ik} + \sum a'_{pq}e'_{pq} + \dots$$

При этом

(1.7)
$$a \rightarrow \|a_{ik}\|, \quad a \rightarrow \|a'_{pq}\|, \dots$$

суть неэквивалентные неприводимые представления, содержащиеся в регулярном, и записывая (1.5) в виде

$$\eta_{ij} = \sum_k a_{ik}\xi_{kj}, \quad \eta'_{pr} = \sum_q a'_{pq}\xi'_{qr}, \dots,$$

мы снова видим, что каждое из них входит столько ($g$, $g'$, ...) раз, какова его степень [число $t$ в (III.5.6), связанное с $g$ равенством $g = d \cdot t$, в данном случае совпадает с $g$, поскольку ранг $d$ алгебры с делением равен теперь 1]. (1.6) влечет за собой требуемую полноту:

$$h = g^2 + g'^2 + \dots$$

$a(s)$ есть функция классов, если $a$ принадлежит центру группового кольца, т. е., согласно § 4 главы III, если в качестве матриц (1.7) выбраны кратные $aE_g$, $a'E_{g'}$, ... соответствующих единичных матриц:

$$a = a\sum_i e_{ii} + a'\sum_p e'_{pp} + \dots$$

Таким образом, элементы

(1.8)
$$\varepsilon = \sum e_{ii}, \quad \varepsilon' = \sum e'_{pp}, \dots$$

образуют базис центра. Число их равно числу всех неприводимых представлений группы $\gamma$. Элементы $e_{ii}$, $e'_{pp}$ дают то полное разложение единицы 1 на взаимно нормальные примитивные идемпотенты, которым мы занимались в § 9 главы III.

Равенство

(1.9)
$$1 = \varepsilon + \varepsilon' + \dots$$

представляет собой разложение 1 на взаимно нормальные идемпотенты, обрывающееся на неприводимых *двусторонне* инвариантных подпространствах, т. е. на простых алгебрах, прямою суммой которых является ($\mathfrak{r}$):

$$x = x\varepsilon + x\varepsilon' + \dots,$$
$$x\varepsilon = \sum_{i,k} \xi_{ik}e_{ik}, \dots$$

На этом мы могли бы закончить. Однако, чтобы внести бóльшую ясность, мы присоединим еще следующие замечания. Закон перемножения матриц эквивалентен следующей таблице умножения для нашего базиса:

$$(1.10)\qquad \begin{cases} e_{ik}e_{kj}=e_{ij}, \quad e'_{pq}e'_{qr}=e'_{pr}, \quad \ldots; \\ \text{все остальные произведения равны } 0. \end{cases}$$

Вычисляя след подстановки (1.5) сначала при „естественном базисе“ $s$, а затем при нашем новом базисе $e_{ik}$, $e'_{pq}$, ... находим:

$$h\cdot a(1)=h\cdot \mathrm{tr}(a)=g\sum_{i}a_{ii}+g'\sum_{p}a'_{pp}+\ldots,$$

или

$$\mathrm{tr}(e_{ik})=0 \ (i\neq k), \quad \mathrm{tr}(e_{ii})=\frac{g}{h};$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

Таблица умножения (1.10) показывает тогда, что единственными отличными от нуля являются следы таких произведений:

$$(1.11)\qquad \mathrm{tr}(e_{ik}e_{ki})=\frac{g}{h}, \quad \mathrm{tr}(e'_{pq}e'_{qp})=\frac{g'}{h}, \ \ldots$$

Поэтому (1.6) дает:

$$(1.12)\qquad \mathrm{tr}(ae_{ki})=\frac{g}{h}a_{ik}.$$

Но

$$\|a_{ik}\|=\sum_{s}a(s)U(s), \quad a_{ik}=\sum_{s}a(s)u_{ik}(s),$$

где $U(s)=\|u_{ik}(s)\|$ — представление рассматриваемой группы. Замечая, что

$$\mathrm{tr}(ae_{ki})=\sum_{s}a(s)e_{ki}(s^{-1}),$$

выводим, таким образом, из (1.12) равенства

$$(1.13)\qquad u_{ik}(s)=\frac{h}{g}e_{ki}(s^{-1}), \quad \chi_{u}(s)=\frac{h}{g}\varepsilon(s^{-1}),$$

в свете которых соотношения (1.11) содержат новое конструктивное доказательство соотношений ортогональности.

Сопоставляя формулу (1.13) для характера $\chi_{a}(s)$ с формулой (III.7.14), выражающей его через производящий идемпотент $e$

соответствующего инвариантного подпространства, видим, что

$$\varepsilon(s) = \frac{g}{h} \sum_{t} e(t^{-1}st). \tag{1.14}$$

Указанием, содержащимся в этом равенстве, мы воспользуемся при конструктивном разложении регулярного представления симметричной группы, к которому мы сейчас и переходим.

## 2. Симметризаторы Юнга. Комбинаторная лемма

Мы будем представлять себе подстановки $f$ индексов $1, 2, \ldots, f$ следующим образом. Имеются разграфленная доска, состоящая из $f$ „полей“, помеченных номерами от 1 до $f$, и $f$ пешек, которые могут быть расставлены на этих $f$ полях. Это можно сделать $f!$ различными способами. Пешки можно сделать различимыми друг от друга путем различной окраски или, если не бояться возможных смешений, — снова с помощью номеров $1, 2, \ldots, n$. Движение $s$ есть переход от одной позиции пешек на доске к другой; оно описывается подстановкой

$$s\colon \quad 1 \longrightarrow 1', \quad 2 \longrightarrow 2', \quad \ldots, \tag{2.1}$$

если пешка с поля 1 передвигается посредством $s$ на поле $1'$, пешка с поля 2 передвигается на поле $2'$, и т. д. Что́ мы хотим подчеркнуть, это — что подстановка (2.1) должна читаться как передвижение пешки с поля 1 на поле $1'$ и т. д., а не как замена пешки № 1 на ее поле пешкой № $1'$ и т. д. Таким образом, движение, показанное на схеме

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| доска | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| пешки | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 1 | 6 | 4 | 2 | 3 |

представляется подстановкой

$$1 \longrightarrow 2, \quad 2 \longrightarrow 5, \quad 3 \longrightarrow 6, \quad 4 \longrightarrow 4, \quad 5 \longrightarrow 1, \quad 6 \longrightarrow 3,$$

а не обратной подстановкой

$$1 \longrightarrow 5, \quad 2 \longrightarrow 1, \quad 3 \longrightarrow 6, \quad 4 \longrightarrow 4, \quad 5 \longrightarrow 2, \quad 6 \longrightarrow 3.$$

Последовательное выполнение движения $s$, (2.1), а затем движения

$$t\colon \quad 1' \longrightarrow 1'', \quad 2' \longrightarrow 2'', \quad \ldots,$$

дает в результате движение, называемое их произведением

$$ts\colon\quad 1 \longrightarrow 1'',\quad 2 \longrightarrow 2'',\quad \ldots$$

Иногда удобно иметь перед глазами одновременно и начальную и конечную позиции пешек. Для этого требуются две доски и два одинаковых набора пешек. Весь этот на вид чрезмерный педантизм оказывает серьезную помощь в уяснении порядка, в котором выполняется композиция подстановок.

Проблема, к которой мы теперь приступаем, заключается в следующем: как, исходя из произвольного тензора $F(i_1 \ldots i_f)$ ранга $f$ и пользуясь идемпотентным оператором симметрии $e$, образовать тензор $eF$, обладающий „максимальной возможной симметрией?“. Мы уже имеем в готовом виде два простых способа этого типа — симметризацию и альтернирование:

$$\frac{1}{f!}\sum_s s \quad \text{и} \quad \frac{1}{f!}\sum_s \delta_s s,$$

порождающие классы симметричных и антисимметричных тензоров; напомним, что $\delta_s = +1$ или $-1$ смотря по тому, четна или нечетна подстановка $s$. Но строку нижних индексов $1, \ldots, f$ можно разбить теперь на несколько строк, имеющих длины $f_1, f_2, \ldots$, указываемые диаграммой $T = T(f_1, f_2, \ldots)$, и выполнить симметризацию тензора относительно аргументов $i_\alpha$ отдельно в каждой из этих строк. Строки мы будем располагать в порядке убывания длин $f_k$:

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant \ldots;\quad f_1 + f_2 + f_3 + \ldots = f. \tag{2.2}$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | | | |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | | | |
| 19 | 20 | 21 | 22 | | | | |
| 23 | 24 | | | | | | |

Диаграмма $T$, соответствующая разбиению
$24 = 8 + 5 + 5 + 4 + 2$

При фиксированной заданной диаграмме $T$, содержащей $f$ полей, обозначим через $p$ любую подстановку, оставляющую каждую пешку в своей *строке*, а через $q$ — любую подстановку, сохраняющую в том же смысле столбцы диаграммы $T$. Наша симметризация „по частям“ выразится тогда суммой

$$a = \sum_{p} p; \tag{2.3}$$

применяя ее к произвольному тензору, мы получим тензор, симметричный относительно $f_1$ первых аргументов, $f_2$ следующих аргументов и т. д. Мы предполагаем здесь поля нашей доски занумерованными числами 1, 2, ..., $f$ в их естественном порядке. Этот процесс не приводит к *примитивному* классу симметрии, т. е. к классу тензоров, обладающих максимальной возможной симметрией. Для усиления условий симметрии можно было бы дополнить симметризацию альтернированием. Если мы выполним альтернирование относительно каких-нибудь аргументов или полей, наудачу выбранных на нашей доске, то если хотя бы два из этих аргументов лежат в одной строке, в результате наверняка получится нуль; действительно, если $F(ik)$ симметрично, то $F(ik) - F(ki)$ есть нуль. Поэтому самое большее, что можно сделать, это — выбрать по полю в каждой строке; без всякого ограничения общности можно считать эти поля взятыми из первого столбца. Эти соображения наводят на мысль дополнить симметризацию (2.3) альтернированием относительно столбцов:

$$b = \sum_{q} \delta_q q. \tag{2.4}$$

Окончательным процессом, который мы сопоставляем диаграмме $T$, будет тогда

$$c = ba = \sum_{p, q} \delta_q q p. \tag{2.5}$$

Эти „симметризаторы“ $c$ впервые были открыты А. Юнгом. В изучении их свойств мы будем следовать Г. Фробениусу или, точнее, упрощенному изложению фробениусовских доказательств, предложенному Дж. Нейманом [2]. Мы хотим доказать три вещи: 1) что $c$, с точностью до численного множителя $\mu \neq 0$, есть идемпотент, т. е. что имеет место равенство

$$cc = \mu c; \tag{2.6}$$

2) что идемпотент $\frac{c}{\mu} = e$ примитивен, так что совокупность всех тензоров $cF$ есть неприводимое инвариантное подпространство тензорного пространства относительно алгебры $\mathfrak{A}$ бисимметричных преобразований, т. е. совокупность величин вида $x\hat{c}$

есть неприводимое инвариантное подпространство группового кольца, рассматриваемого как $f!$-мерное векторное пространство, и 3) что инвариантные подпространства, порожденные таким способом симметризаторами $c$ и $c'$, соответствующими различным схемам $T$ и $T'$, неэквивалентны.

Имеется ли основание ожидать, что мы получим тогда все неприводимые представления симметрической группы $\pi_f$? Число различных схем $T$ равно числу „разбиений“ $f$ на слагаемые $f_1$, $f_2$, ...:

$$(2.2)\qquad f=f_1+f_2+\ldots,\quad f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots>0.$$

Распределение подстановок на классы сопряженных элементов определяется записью произвольной подстановки $s$ в виде произведения взаимно простых циклов. Цикл, скажем (1234), есть подстановка, переводящая 1 в 2, 2 в 3, 3 в 4, 4 в 1. Класс подстановки $s$ описывается числом и длинами составляющих ее циклов: сопряженные элементы получаются путем всевозможных перераспределений номеров в той же схеме циклов. Так, например, подстановки

$$s=(1234)(56)(7)(8)\quad\text{и}\quad s'=(7251)(38)(4)(6)$$

— сопряженные: $s'=rsr^{-1}$, где $r$ есть подстановка, переводящая

12345678 в 72513846.

Если имеется $\alpha_1$ циклов длины 1, $\alpha_2$ циклов длины 2, ..., то эти числа $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., удовлетворяющие условиям $\alpha_1\geqslant 0, \alpha_2\geqslant 0, \ldots$ и

$$(2.7)\qquad f=1\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\ldots,$$

определяют класс. Таким образом, число классов равно числу решений уравнения (2.7) в неотрицательных целых числах. Если положить

$$f_v=\alpha_v+\alpha_{v+1}+\ldots,$$

то неравенства $\alpha_v\geqslant 0$ превратятся в $f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots$, а уравнение (2.7) — в $f=f_1+f_2+\ldots$ Поэтому число классов равно числу различных диаграмм. Это обстоятельство позволяет с достаточным основанием рассчитывать на то, что построение Юнга даст полный комплект всевозможных неприводимых представлений.

Подстановки $p$ образуют группу (порядка $f_1!f_2!\ldots$) и то же верно для подстановок $q$. Если подстановка $s$ может быть представлена в виде $qp$, то это разложение на составляющие $p$ и $q$ единственно. Действительно,

$$\text{из } qp = q'p' \text{ следует } q'^{-1}q = p'p^{-1}.$$

Но подстановка типа $p$ может быть равна подстановке типа $q$ лишь будучи тождественной подстановкой 1; в самом деле, это — единственная подстановка, сохраняющая и строки и столбцы диаграммы $T$. Поэтому

$$p'p^{-1} = q'^{-1}q = 1 \text{ или } p = p', \quad q = q'.$$

Следовательно, симметризатор $c$ может быть определен следующим образом:

$$c(s) = \begin{cases} \delta_q, & \text{если } s = qp, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

все его коэффициенты равны либо 0, либо $\pm 1$.

Мы могли бы занумеровать поля нашей диаграммы $T$ числами $1, 2, \ldots, f$ в каком-нибудь другом порядке $r_1, r_2, \ldots, r_f$. То же самое движение, которое описывалось раньше подстановкой $s$, описывалось бы теперь подстановкой $rsr^{-1}$, где $r$ есть подстановка

$$1 \longrightarrow r_1, \quad 2 \longrightarrow r_2, \quad \ldots,$$

так что $c$ заменилось бы на $c_r = rcr^{-1}$ с коэффициентами

$$c_r(s) = c(r^{-1}sr).$$

Интерпретация величин $x$ нашего группового кольца $\mathfrak{r}$ как операторов в тензорном пространстве была нужна здесь лишь для эвристических целей; теперь мы забудем о ней и сосредоточим наше внимание на $f!$-мерном пространстве $\mathfrak{r}$ или $\rho$. Инвариантное подпространство всех величин $x\hat{c}$ будет обозначаться через $\rho_T = \rho(f_1 f_2 \ldots)$, а соответствующее представление кольца $\mathfrak{r}$ или группы $\pi_f$ (индуцированное в $\rho_T$ регулярным представлением) — через $\langle \rho(f_1 f_2 \ldots) \rangle$. Очевидно нумерация полей не играет никакой роли, по крайней мере, поскольку это касается вопроса об эквивалентности. Действительно, подпространство величин $y = x\hat{c}$ эквивалентно подпространству величин $y' = x'\hat{c}_r = (x'r^{-1})\hat{c}r$, как это сразу показывает взаимно однозначное отображение подобия

$$y' = yr \qquad (x' = xr)$$

Исследование симметризаторов Юнга будет основываться на простой комбинаторной лемме, относящейся к двум диаграммам $T$, $T'$. Расположим все диаграммы в алфавитном порядке, считая, что $T=(f_1, f_2, \ldots)$ предшествует или стоит выше $T'=(f'_1, f'_2, \ldots)$, если первая неравная нулю из разностей

$$f_1-f'_1,\ f_2-f'_2,\ \ldots$$

положительна. Через $\{T\}$ будем обозначать любую позицию наших $f$ пешек на $f$ полях диаграммы $T$. Движение, заменяющее заданное $\{T\}$ заданным $\{T'\}$, есть подстановка

$$s\colon \{T\} \rightarrow \{T'\}.$$

Поля в каждой диаграмме $T$ предполагаются занумерованными числами $1, 2, \ldots, f$ в их естественном порядке.

Лемма (IV.2.A). *Пусть $\{T\}$ и $\{T'\}$ — любые позиции в схемах $T$ и $T'$ и пусть $T$ не ниже $T'$. Тогда представляются две возможности:*

1) *либо имеются две пешки, стоящие в одной и той же строке в $\{T\}$ и в одном и том же столбце в $\{T'\}$;*

2) *либо $T=T'$ и подстановка $\{T\}\rightarrow\{T'\}$ имеет вид $qp$.*

Доказательство. Пусть $p'$, $q'$ имеют тот же смысл относительно $T'$, что $p$, $q$ относительно $T$. $f_1$ пешек, занимающих первую строку диаграммы $T$ в $\{T\}$, должны быть как-то распределены в $f'_1$ столбцах диаграммы $T'$ в $\{T'\}$. Если $f_1>f'_1$, то по крайней мере две из этих пешек должны находиться в одном и том же столбце в $T$: верно альтернативное утверждение 1). Если же $f_1=f'_1$ и первое альтернативное утверждение неверно, то все указанные пешки должны стоять в различных столбцах диаграммы $T'$; тогда с помощью подстановки $q'$, сохраняющей столбцы в $\{T'\}$, мы можем передвинуть эти пешки во главу соответствующих столбцов. Отбросим теперь эти $f_1$ пешек, занимающих первую строку как в $\{T\}$, так и в новой позиции $q'\{T'\}$, и вычеркнем первые строки в обеих схемах. Затем применим то же рассуждение ко второй строке, которая стала теперь первой строкой в обезглавленных схемах $T$, $T'$, и продолжим этот процесс. Тогда либо на некотором шаге $\nu$ мы встретимся в $T$ с более длинной строкой, чем в $T'$:

$$f_1=f'_1,\ \ldots,\ f_{\nu-1}=f'_{\nu-1},\ f_\nu>f'_\nu,$$

либо $T=T'$. В первом случае, как показывает приведенное выше рассуждение, должно выполняться первое из альтернативных утверждений леммы. Во втором же случае можно избежать этого лишь, если некоторая подстановка $q'$ приводит к позиции $q'\{T'\}$, совпадающей с $\{T\}$ с точностью до порядка расположения пешек в каждой строке. Поэтому некоторая перетасовка $p$ пешек в строках позиции $\{T\}$ в соединении с перестановкой $q'$ пешек в различных столбцах позиции $\{T'\}$ приведут обе позиции к полному совпадению:

$$T = T', \quad p\{T\} = q'\{T'\}.$$

Это равенство, или $\{T'\} = q'^{-1}p\{T\}$, означает, что подстановка $\{T\} \longrightarrow \{T'\}$ имеет вид $qp$. Действительно, так как подстановка определяется номерами полей, а не пешек, то $q'$ есть некоторое $q$, если $T' = T$.

Сформулируем нашу лемму заново, разбив ее теперь на два случая: $T$ выше $T'$ и $T = T'$. Во втором случае заменим обозначение $\{T'\}$, означающее здесь новую позицию пешек на доске $T$, через $\{T\}'$. Если выполняется первое из альтернативных утверждений леммы (IV.2.A), то обозначим через $u$ транспозицию двух пешек, о которых идет там речь, в их исходном положении в $\{T\}$, а через $v'$ — то же для их окончательного положения в $\{T'\}$. Если $s$ — снова подстановка $\{T\} \longrightarrow \{T'\}$, то имеем тогда

$$su = v's;$$

$u$ есть подстановка типа $p$, а $v'$ — типа $q'$.

Лемма (IV.2.B). *Пусть $T$ — заданная диаграмма. Если подстановка $s$ не может быть представлена в виде $qp$, то существуют две транспозиции $u$, $v$ такие, что $su = vs$, причем $u$ есть подстановка типа $p$, а $v$ — типа $q$.*

Лемма (IV.2.C). *Если $T$ выше $T'$, то для произвольной подстановки $s$ можно найти транспозицию $u$ типа $p$ и транспозицию $v'$ типа $q'$ такие, что $su = v's$.*

Действительно, взяв любую позицию $\{T\}$, вводим ту позицию $\{T'\}$ на второй доске $T'$, в которую переходит $\{T\}$ под действием $s$.

## 3. Неприводимые представления симметрической группы

Коэффициенты $c(s)$ симметризатора $c$ очевидно удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(3.1) \qquad c(sp) = c(s), \quad c(qs) = \delta_q c(s).$$

Лемма (IV.3.A). *Каждая величина $d$, удовлетворяющая тем же условиям*

$$(3.2) \qquad d(sp) = d(s), \quad d(qs) = \delta_q d(s),$$

*есть численное кратное симметризатора $c$.*

(3.3) $$d = \lambda c, \quad d(s) = \lambda c(s); \quad \lambda = d(1).$$

Доказательство. Из (3.2), в частности, следует $d(p) = d(1)$, и $d(qp) = \delta_q d(p) = \delta_q d(1)$, так что соотношения (3.3) выполняются для подстановок $s$ вида $qp$.

Если $s$ не представимо в этом виде, то пользуемся парой транспозиций $u$, $v$, доставляемых леммой (IV.2.B), и в качестве следствия соотношений (3.2) получаем:

$$d(su) = d(s), \quad d(vs) = -d(s),$$

что в соединении с $su = vs$ приводит к равенству $d(s) = -d(s)$ или $d(s) = 0$.

Лемма (IV.3.B). *Если $T$ выше $T'$, то каждая величина $d$, удовлетворяющая соотношениям*

$$d(sp) = d(s), \quad d(q's) = \delta_{q'} d(s),$$

*необходимо равна нулю.*

Доказательство проводится с помощью того же рассуждения, что и во второй части предыдущего доказательства, опираясь на лемму (IV.2.C).

Теорема (IV.3.C). *$cxc$ является кратным $c$; в частности $cc = \mu c$.*

Доказательство. Величина $d = cxc$,

$$d(s) = \sum c(t)\, x(r)\, c(t'), \quad trt' = s,$$

обладает свойствами (3.2).

Теорема (IV.3.D). *Если $T$ выше $T'$, то каждая величина вида $c'xc$ равна нулю; в частности $c'c = 0$.*

Доказательство аналогично.

В главе VII будет в одном месте использовано несколько более сильное соотношение

(3.4) $$c'xa = 0,$$

содержащее $a$, (2.3), вместо $c$.

Коэффициент $\mu$ из теоремы (IV.3.C) есть целое число,

(3.5) $$\mu = \sum_s c(s)\, c(s^{-1}).$$

Важно знать, что оно отлично от нуля. Мы докажем его положительность. Согласно (3.5), число $\mu$ указывает, насколько чаще уравнение

$$q_1 p_1 q_2 p_2 = 1$$

имеет решения, содержащие подстановки $q_1$ и $q_2$ одинаковой четности, $\delta_{q_1} = \delta_{q_2}$, чем противоположных четностей.

Теорема (IV.3.E).

$$\mu g = f!, \tag{3.6}$$

*где $g$ — размерность подпространства $\rho_T$.*

Доказательство. $\rho_T$ состоит из всех величин вида $x\hat{c}$. Подстановка $x \longrightarrow x' = x\hat{c}$ переводит каждую величину $x$ в некоторую величину $x'$ из $\rho_T$, внутри же $\rho_T$ является умножением на $\mu$:

$$(x\hat{c})\,\hat{c} = x(\hat{c}\,\hat{c}) = \mu\cdot(x\hat{c}).$$

Приурочив систему координат к подпространству $\rho_T$, мы сразу видим, что след указанной подстановки равен $g\mu$. Используя же естественный базис, т. е. подстановки $s$, мы находим, что следом преобразования

$$x'(s) = \sum_t x(t)\,\hat{c}(t^{-1}s)$$

служит $f!\,\hat{c}(1) = f!$.

Наша теорема показывает, между прочим, что $g = g(f_1 f_2 \ldots)$, степень представления $\langle\rho(f_1 f_2 \ldots)\rangle$, является делителем порядка $f!$ нашей группы. Соответствующее утверждение в общей теории, а именно, что степени абсолютно неприводимых представлений конечной группы являются делителями ее порядка, также оказывается справедливым, но лежит относительно глубоко; поэтому мы воздержались от доказательства его в § 1.

Введем теперь идемпотент

$$e = \frac{1}{\mu}\,c = \frac{g}{f!}\,c \tag{3.7}$$

и докажем следующее предложение:

Теорема (IV.3.F). *$e$ есть примитивный идемпотент.*

Действительно, пусть $e$ допускает разложение

$$e = e_1 + e_2,$$

где

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 e_2 = 0,$$
$$e_2 e_1 = 0, \quad e_2 e_2 = e_2.$$

Тогда $ee_1 = e_1$, $ee_1 e = e_1 e = e_1$, и потому, в силу теоремы (IV.3.C), $e_1 = \lambda e$. Так как $e_1$ — идемпотент, то численный множитель $\lambda$ удовлетворяет соотношению $\lambda^2 = \lambda$. Поэтому $\lambda$ есть либо 1, либо 0, и $e = e + 0$, $e = 0 + e$ — единственные возможные разложения идемпотента $e$.

Теорема (IV.3.G). *Если $T \neq T'$, то неприводимые инвариантные подпространства $\rho_T$, $\rho_{T'}$ неэквивалентны.*

Доказательство. Пусть $T$ выше $T'$. По теореме (IV.3.D), каждая величина $x = x\hat{c}'$ из $\rho_{T'}$ удовлетворяет тогда уравнению $\hat{c}x = 0$, тогда как в $\rho_T$ имеется, по крайней мере, одна величина: $x = \hat{c}$, для которой $\hat{c}x \neq 0$. Это делает невозможным существование взаимно однозначного отображения подобия $\rho_T$ на $\rho_{T'}$.

Руководствуясь соотношением (1.14), введем величину $\varepsilon$ формулой

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{\mu} \sum_t e(t^{-1}st) = \frac{1}{\mu^2} \sum_t c(t^{-1}st); \tag{3.8}$$

$\varepsilon(s)$, очевидно, есть функция классов и потому $\varepsilon$ лежит в центре группового кольца.

Лемма (IV.3.H). *$\varepsilon'\varepsilon = 0$ или $\varepsilon$, смотря по тому, принадлежат ли $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ различным диаграммам $T$, $T'$ или же одной и той же диаграмме $T$.*

Доказательство. Мы можем написать

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu^2} \sum_t tct^{-1}. \tag{3.9}$$

Это показывает, что равенство $\varepsilon'\varepsilon = 0$ является непосредственным следствием теоремы (IV.3.D), если $T$ выше $T'$. Но так как $\varepsilon$ лежит в центре группового кольца, то $\varepsilon'\varepsilon = \varepsilon\varepsilon'$; поэтому, при том же предположении, и $\varepsilon\varepsilon' = 0$ и, наконец, $\varepsilon'\varepsilon = 0$, независимо от того, выше ли $T$, чем $T'$, или ниже.

Произведение $\varepsilon c \, (= c\varepsilon)$ с точностью до множителя $\mu^2$ равно

$$\sum_t tct^{-1}c. \tag{3.10}$$

По теореме (IV.3.C), $ct^{-1}c = \lambda c$, где

$$\lambda = \sum c(s)\,c(s'), \quad st^{-1}s' = 1,$$

или

$$\lambda = \sum_s c(ts^{-1})\,c(s) = cc(t) = \mu c(t).$$

Поэтому выражение (3.10) равно

$$\mu c \sum c(t)\,t = \mu cc = \mu^2 c,$$

или

$$\varepsilon c = c.$$

Так как $\varepsilon$ принадлежит центру, то отсюда следует, что

$$\varepsilon t c t^{-1} = t c t^{-1}.$$

Тогда, суммируя по $t$, получаем:

$$\varepsilon\varepsilon = \varepsilon.$$

Наша лемма влечет соотношения ортогональности для характеров

$$\chi(s) = \frac{f!}{g}\varepsilon(s^{-1}) = \mu\varepsilon(s^{-1}). \tag{3.11}$$

Она показывает, что функции классов $\varepsilon(s)$, $\varepsilon'(s)$, ..., соответствующие различным диаграммам $T$, $T'$, ..., линейно независимы. Так как число различных диаграмм равно числу классов в $\pi_f$, то каждая функция классов должна быть линейной комбинацией указанных базисных функций. В частности, должно выполняться равенство вида

$$1 = \lambda\varepsilon + \lambda'\varepsilon' + \dots$$

с численными коэффициентами $\lambda$, $\lambda'$, ... Умножение на $\varepsilon$ дает, в силу леммы,

$$\varepsilon = \lambda\varepsilon \quad \text{или} \quad \lambda = 1.$$

Поэтому имеем разложение единичного элемента 1:

$$1 = \varepsilon + \varepsilon' + \dots, \tag{3.12}$$

являющееся максимумом того, что вообще можно получить в области функций классов.

**Теорема** (IV.3.J). *Единичный элемент 1 группового кольца симметрической группы $\pi_f$ расщепляется на элементы центра $\varepsilon$, соответствующие диаграммам $T$ Юнга.*

(3.12) можно записать в виде

$$x = \frac{1}{\mu^2}\sum_r x\hat{c}_r + \frac{1}{\mu'^2}\sum_r x\hat{c}'_r + \dots,$$

и это показывает, что сумма инвариантных подпространств, порождаемых всеми $\hat{c}_r$, $\hat{c}'_r$, ..., исчерпывает все рассматриваемое $f!$-мерное пространство. Так как эти подпространства неприводимы, то мы можем, в силу леммы (IV.2.B), выбрать из них линейно независимые, образующие в сумме все пространство. Это и есть разложение регулярного представления на неприводимые составляющие. Мы знаем априори, и можем заново вывести из соотношения (3.12), записав его в виде

$$f!1(s)=g\chi(s)+g'\chi'(s)+\ldots, \tag{3.13}$$

сколько раз входит каждая неприводимая компонента: столько раз ($g$), какова ее степень. [В (3.13) левая часть есть характер регулярного представления.] Однако мы не будем стараться выполнить это разложение тем же прямым конструктивным способом, как и разложение (3.12) на двусторонне инвариантные подпространства[3]. Разложения (3.13) достаточно для всех важных целей; при этом, не содержа никакого произвола, оно имеет преимущество единственности.

## 4. Разложение тензорного пространства

Как и в § 6 главы III, мы обозначим теперь через $\mathfrak{A}_f$ алгебру всех бисимметричных линейных преобразований

$$A_f=\|a(i_1\ldots i_f;\ k_1\ldots k_f)\|$$

в тензорном пространстве $P_f$ ранга $f$.

Теорема (IV.4.A). *$P_f$ расщепляется на неприводимые инвариантные подпространства $\Sigma_\alpha$ относительно алгебры $\mathfrak{A}_f$, в которых $\mathfrak{A}_f$ индуцирует представления $\langle\Sigma_\alpha\rangle$. Всякое инвариантное подпространство пространства $P_f$ разлагается на неприводимые части, каждая из которых подобна одному из подпространств $\Sigma_\alpha$.*

*Более обще: всякое представление алгебры $\mathfrak{A}_f$ вполне приводимо, всякое неприводимое представление эквивалентно одному из $\langle\Sigma_\alpha\rangle$.*

Первую часть этой теоремы мы не только доказали [теорема (III.9.D)], но и дали теперь совершенно элементарный способ построения неприводимых подпространств, на которые расщепляется $P_f$. Тензоры каждой из этих частей можно получить применением некоторого симметризатора Юнга к совершенно произвольным тензорам. Вторая часть теоремы следует из общей теоремы (III.5.C).

При применении метода раздела В главы III нужно знать двусторонне инвариантное подпространство $\rho_0=\natural P_f$ пространства $\rho$, являющееся линейной оболочкой всех величин $F(\cdot;\ i_1\ldots i_f)$ с коэффициентами $F(s;\ i_1\ldots i_f)=s\,F(i_1,\ldots i_f)$ (где $F$ —

произвольный тензор, а $i_\alpha$ имеют любые значения от 1 до $n$). Для этой цели полезно заметить следующее:

Лемма (IV.4.B). *Если диаграмма $T$ симметризатора Юнга $c$ содержит более $n$ строк, то $cF=0$ для любого тензора $F$. В противном же случае существует тензор $F_0$ такой, что $cF_0\neq 0$.*

Доказательство. $cF$ антисимметричен по аргументам из первого столбца диаграммы $T$. Следовательно, если длина этого столбца превосходит $n$, то наш тензор должен обратиться в нуль.

Если, напротив, $T$ состоит из $m\leqslant n$ строк, то введем тензор $\Phi_0$, все компоненты которого равны нулю, кроме компоненты

$$\Phi_0\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots\dots & 1\\ 2 & 2 & \dots\dots & 2\\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ m & \dots & m & \end{pmatrix}=1. \tag{4.1}$$

Аргументы $i_1, \dots, i_f$ расположены здесь в соответствии с диаграммой $T$. Этот тензор $\Phi_0$ симметричен по аргументам из каждой строки; применение к $\Phi_0$ процесса $c$ вызывает лишь альтернирование относительно столбцов. Поэтому $F_0=c\Phi_0$ есть, с точностью до численного ненулевого множителя, тот тензор, который для всякой комбинации значений аргументов, получающейся из комбинации в (4.1) с помощью подстановки $q$ столбцов, имеет компоненту $\delta_q$, все же остальные его компоненты равны нулю.

Эта лемма показывает, что в тензорном пространстве играют роль лишь разбиения

$$f_1+f_2+\dots+f_n=f,\quad f_1\geqslant f_2\geqslant\dots\geqslant f_n\geqslant 0, \tag{4.2}$$

на $n$ слагаемых, тогда как в анализ симметрической группы входили произвольные разбиения. Разница исчезает в том и только в том случае, когда $n\geqslant f$. Допустимость равенства $f_n=0$ в (4.2) позволяет нам в формулировке нашего ограничения говорить о разбиениях не на $\leqslant n$, а на $n$ слагаемых.

В силу определения (3.8), $iF=0$, если $i$ соответствует одной из диаграмм, исключенных указанным ограничением. Поэтому

$$F=iF+i'F+\dots, \tag{4.3}$$

где сумма распространена лишь на диаграммы, содержащие не более $n$ строк. Для каждого $x$ из $\rho_0$ имеем в том же смысле

$$x = x\hat{i} + x\hat{i}' + \ldots$$

или

$$x = xe = ex,$$

где сумма

$$i = \hat{i} + \hat{i}' + \ldots \tag{4.4}$$

распространена лишь на указанные диаграммы. $e$ лежит в центре алгебры $\rho$. Заметим, что $\hat{i} = i$ и потому $\hat{e} = e$, так как в симметрической группе $s^{-1}$ сопряжено с $s$ (имеет циклы той же длины, что и $s$). Мы утверждаем, что $e$ само лежит в $\rho_0$ и потому является там единичным элементом. Для доказательства рассуждаем следующим образом: $\hat{c}$, соответствующее диаграмме, содержащей не более $n$ строк, лежит в $\rho_0$. Действительно, так как $\rho^0$ лево-инвариантно, то совокупность $\rho_T^0$ всех величин вида $x\hat{c}$, где $x$ пробегает $\rho_0$, есть (лево-) инвариантное подпространство, содержащееся в пространстве $\rho_T$ всех величин $x\hat{c}$, получающемся, когда $x$ пробегает все $\rho$. Поскольку $\rho_T$ неприводимо, $\rho_T^0$, как его инвариантная часть, есть либо 0, либо все $\rho_T$. Но первая возможность исключена предыдущей леммой, и, следовательно, $\rho_T^0 = \rho_T$. Так как $\rho_0$ как лево-, так и право-инвариантно, то $\rho_T^0$ содержится в $\rho_0$. Это показывает, что $\hat{c}$ лежит в $\rho_0$, поскольку $\hat{c} = 1 \cdot \hat{c}$ лежит в $\rho_T$. Снова используя двустороннюю инвариантность $\rho_0$, заключаем, что $\hat{i}$, (3.9), принадлежит $\rho_0$. А так как это верно и для любого другого члена суммы (4.4), то $e$ также принадлежит $\rho_0$.

Теорема (IV.4.C). *Сумма*

$$e = i + i' + \ldots,$$

*распространенная на все диаграммы, содержащие не более $n$ строк, есть единица в $\rho_0$.*

Таким образом, мы можем уточнить утверждение теоремы (IV.4.A) следующим образом:

Теорема (IV.4.D). *Если $c$ — симметризатор Юнга, соответствующий разбиению (4.2) на $n$ слагаемых, то тензоры $cF$ образуют ненулевое неприводимое инвариантное подпространство $P(f_1 f_2 \ldots f_n)$ тензорного пространства $P_f$. В разложение $P_f$ на неприводимые части эта составляющая* *входит $g$ раз, где $g$ — размерность подпространства из $\rho$, образованного всеми величинами вида $xc$; при этом*

$$g=\frac{f!}{\mu}, \quad \mu=\sum_{s} c(s)\,c(s^{-1}). \tag{4.5}$$

*Различные диаграммы порождают неэквивалентные подпространства. Каждое неприводимое инвариантное подпространство пространства $P_f$ подобно какому-нибудь из пространств $P(f_1\cdot\cdot\cdot f_n)$.*

Уже значительно раньше было отмечено, что как симметричные, так и антисимметричные тензоры образуют неприводимые инвариантные подпространства, из которых, правда, последнее нулевое, если $f>n$. Они отвечают, соответственно, разбиениям

$$f=f \quad \text{и} \quad f=1+1+\ldots$$

Нам еще надлежит вставить краеугольный камень всего этого здания, доказав, что $\mathfrak{A}_f$ есть обертывающая алгебра группы всех преобразований

$$\Pi_f(A)=A\times A\times\ldots\times A \quad (f \text{ множителей}),$$

индуцируемых в тензорном пространстве невырожденными линейными преобразованиями $A=\|a(ik)\|$ основного векторного пространства. Именно это замечание дало первый толчок всему ходу наших исследований, начиная с раздела B главы III. Однако с той же затратой труда мы можем достичь даже большего, подвергнув одновременному рассмотрению все тензорные пространства $P_0$, $P_1, \ldots, P_f$ любого ранга $v\leqslant f$. Введем алгебру $\mathfrak{A}^{(f)}$, элементы которой

$$A^{(f)}=(A_f, A_{f-1}, \ldots, A_0)$$

составлены из произвольных бисимметричных матриц

$$A_v=\|a(i_1\ldots i_v;\ k_1\ldots k_v)\|$$

в $P_v$ $(v=f, f-1, \ldots, 0)$. Элемент $A^{(f)}$, индуцируемый невырожденным преобразованием $A$ векторного пространства, определяется как

$$\Pi^{(f)}(A)=(\Pi_f(A),\ \Pi_{f-1}(A), \ldots, \Pi_0(A)). \tag{4.6}$$

Теорема (IV.4.E). *$\mathfrak{A}^{(f)}$ есть обертывающая алгебра группы элементов $\Pi^{(f)}(A)$, индуцируемых всеми невырожденными линейными преобразованиями $A$ векторного пространства.*

Доказательство. Если бы обертывающая алгебра $\overline{\mathfrak{A}}^{(f)}$ группы элементов $\Pi^{(f)}(A)$ была на самом деле уже, чем $\mathfrak{A}^{(f)}$, то существовало бы линейное соотношение

$$(4.7) \quad \sum_{v=0}^{f} \sum_{i,k} \gamma(i_1 \ldots i_v; k_1 \ldots k_v)\, a(i_1 \ldots i_v; k_1 \ldots k_v) = 0$$

с фиксированными „бисимметричными“ коэффициентами $\gamma$, выполняющееся для всех элементов из $\overline{\mathfrak{A}}^{(f)}$ или всех элементов (4.6), т. е. полином от $n^2$ переменных $a(ik)$

$$\sum_{v=0}^{f} \sum_{i,k} \gamma(i_1 \ldots i_v; k_1 \ldots k_v)\, a(i_1k_1) \ldots a(i_vk_v)$$

обращался бы в нуль для всех значений переменных, удовлетворяющих алгебраическому неравенству

$$\det(a(ik)) \neq 0.$$

Но тогда он тождественно равнялся бы нулю. Если рассматривать каждую пару $(ik)$ как один индекс $j$, то коэффициенты $\gamma$ этого полинома будут записаны в симметричной форме. Следовательно, все эти коэффициенты $\gamma$ должны быть равны нулю, что, однако, противоречит нашему предположению о существовании нетривиального соотношения (4.7).

В качестве следствия нашего последнего предложения мы можем высказать следующее утверждение[4]:

Теорема (IV.4.F). *Предложения* (IV.4.A) *и* (IV.4.D) *справедливы и в том случае, если инвариантность, неприводимость и т. д. относить к группе преобразований, индуцируемых в тензорном пространстве группой* $GL(n)$ *векторного пространства.*

*Каждое представление* $A \longrightarrow T(A)$ *группы* $GL(n)$, *где элементами в* $T(A)$ *служат формы степени* $f$ *относительно элементов* $a(ik)$ *из* $A$, *вполне приводимо, а его неприводимые составляющие эквивалентны тем* $\langle P(f_1 \ldots f_n)\rangle$, *которые получаются при разложении* $P_f$. (Если элементами в $T(A)$ служат *полиномы* степени $f$, то полная приводимость также имеет место, а неприводимые составляющие эквивалентны тем $\langle P(f_1 \ldots f_n)\rangle$, для которых $f_1 + \ldots + f_n \leqslant f$.)

*Никакие два неприводимые представления группы* $GL(n)$, *получающиеся из тензорных пространств различного ранга, не эквивалентны.*

Разумеется, здесь $\langle \mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)\rangle$ обозначает то представление полной линейной группы, полем действия которого служит тензорное множество $\mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)$.

Мы должны привести доказательство лишь последнего замечания нашей теоремы. Пусть рассматриваемые ранги будут $f$ и $v < f$. Согласно теореме (IV.4.E), можно рассматривать $(\mathrm{P}_f, \mathrm{P}_{f-1} \ldots, \mathrm{P}_0)$ как поле действия всех

$$A^{(f)} = (A_f, A_{f-1}, \ldots, A_0)$$

из $\mathfrak{A}^{(f)}$. Пусть тензоры $F_f$ и $F$ рангов $f$ и $v$ пробегают соответственно неприводимые инвариантные подпространства пространств $\mathrm{P}_f$ и $\mathrm{P}_v$, и предположим, что существует взаимно однозначное отображение подобия $F_f \rightleftarrows F_v$. То же самое отображение должно сопоставлять $A_f F_f$ с $A_v F_v$. Но среди элементов $A^{(f)}$ имеется такой, в котором $A_f$ есть единичная матрица, а $A_v = 0$. Пользуясь им, получаем, что каждому тензору $F_f$ соответствует нуль. Следовательно, оба подпространства должны быть нулевыми.

## 5. Величины. Разложение

Многообразие всех тензоров из $\mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)$, рассматриваемое как поле действия группы $GL(n)$, есть область значений величины типа $\langle \mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)\rangle$, или, как мы предпочтем говорить, величины *сигнатуры* $(f_1, \ldots, f_n)$. Областью значений кронекеровского произведения двух таких величин, сигнатур $(f_1, \ldots, f_n)$ и $(g_1, \ldots, g_n)$, будет совокупность всех тензоров

$$F(i_1 \ldots i_f\, k_1 \ldots k_g)$$

ранга $h = f + g$, которые как функции первых $f = f_1 + \ldots + f_n$ аргументов $i$ принадлежат $\mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)$, а как функции последних $g = g_1 + \ldots + g_n$ аргументов $k$ принадлежат $\mathrm{P}(g_1 \ldots g_n)$. Базис для этих тензоров получится, если в произведении

$$F(i_1 \ldots i_f)\, G(k_1 \ldots k_g)$$

дать $F$ пробегать базис для $\mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)$, а $G$ — базис для $\mathrm{P}(g_1 \ldots g_n)$. Подобно всякому другому инвариантному подпространству пространства $\mathrm{P}_h$, указанная совокупность разбивается на неприводимые инвариантные части, каждая из которых подобна некоторому $\mathrm{P}(h_1 \ldots h_n)$ с $h_1 + \ldots + h_n = h$.

Таким образом, рассматриваемый нами класс примитивных типов величин замкнут относительно операции кронекеровского умножения (сопровождаемого разложением на примитивные части). Допустив в качестве примитивных величин лишь ковариантные векторы, мы получим, очевидно, наименьший класс, удовлетворяющий указанному требованию, поскольку тензор ранга $f$ есть кронекеровское произведение $f$ векторов. Однако уже контравариантный вектор $\xi$ является простым примером величины типа, не подпадающего под нашу схему. Если ограничиться унимодулярными подстановками $A$, то $\xi$ будет вести себя как компонентный определитель

$$[x^{(1)} \dots x^{(n-1)}] \tag{5.1}$$

$n-1$ ковариантных векторов, использованный в § 8 главы II, или как косо-симметричный тензор ранга $n-1$, т. е. как величина сигнатуры $(1, \dots, 1, 0)$. Но по отношению к произвольным элементам $A$ закон преобразования для $\xi$ отличается от закона преобразования для (5.1) множителем

$$\Delta^{-1}, \quad \text{где} \quad \Delta = \det A.$$

Это наводит на следующее общее замечание. Исходя из заданного представления $R(A)$, можно образовать представление

$$A \rightarrow |A|^e R(A) \tag{5.2}$$

той же степени; $e$ здесь — любой целый показатель. Если $R(A)$ есть представление сигнатуры $(f_1, \dots, f_n)$ и $e \geqslant 0$, то представление (5.2) имеет сигнатуру $(f_1+e, \dots, f_n+e)$. Действительно, поставим перед диаграммой $T(f_1 \dots f_n)$ $e$ столбцов длины $n$, так что получится $T(f_1+e \dots f_n+e)$. Рассмотрим тензоры $F$, косо-симметричные относительно аргументов, стоящих в каждом из этих столбцов, и обладающие симметрией $T(f_1 \dots f_n)$ относительно совокупности остальных аргументов. Эти тензоры, очевидно, образуют неприводимое инвариантное подпространство, которое можно было бы охарактеризовать как

$$\mathrm{P}(e \dots e) \times \mathrm{P}(f_1 \dots f_n). \tag{5.3}$$

$\mathrm{P}(f_1+e \dots f_n+e)$ есть часть пространства (5.3) и потому, вследствие неприводимости последнего, должно совпадать с ним. Доказанный сейчас факт дает нам возможность приписать представлению (5.2) сигнатуру $(f_1+e; \dots, f_n+e)$, когда $R(A)$ есть представление $\langle f_1 \dots f_n \rangle$, независимо от того, будет ли $e \geqslant 0$ или $< 0$; действительно, представление (5.2) зависит лишь от сумм $f_1+e, \dots, f_n+e$. Результатом этого небольшого обобщения является устранение условия $f_n \geqslant 0$: любые целые числа

$f_1, \dots, f_n$, расположенные в убывающем порядке,

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \dots \geqslant f_n, \tag{5.4}$$

образуют сигнатуру некоторого неприводимого представления. Соответствующие примитивные величины мы будем называть *обобщенными*; Кэли ввел для них термин *quantic*. Контравариантный вектор включается теперь в нашу классификацию как обобщенная примитивная величина сигнатуры $(0, \dots, 0, -1)$. Кронекеровское произведение двух обобщенных величин, сигнатур $(f_1, \dots, f_n)$ и $(g_1, \dots, g_n)$, разбивается на некоторое число независимых обобщенных величин определенных сигнатур $(h_1, \dots, h_n)$: замкнутость относительно умножения при нашем обобщении не утерялась. Все типы получаются из диаграмм симметрии $T(f_1 \dots f_{n-1}0)$, содержащих лишь $n-1$ строк, путем присоединения множителя $\Delta^e$ с любым целым показателем $e$.

Наряду с ковариантными тензорами, рассматривавшимися до сих пор, заслуживают рассмотрения и контравариантные тензоры $\Phi(i_1 \dots i_f)$, закон преобразования которых отличается от (III.6.1) тем, что $\|a(ik)\|$ заменяется контрагредиентной матрицей $\|\hat{a}(ik)\|$. В какой связи находятся ковариантные тензоры, обладающие заданной симметрией $T(f_1 \dots f_n)$, и контравариантные тензоры с той же симметрией? Я утверждаю: в то время как первые образуют примитивную величину сигнатуры $(f_1, \dots, f_n)$, вторые образуют примитивную величину сигнатуры $(-f_n, \dots, -f_1)$. В частности, контравариантная форма степени $r$,

$$\varphi(x) = \sum \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} \varphi_{r_1 \dots r_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \qquad (r_1 + \dots + r_n = r),$$

есть примитивная величина сигнатуры $(0, \dots, 0, -r)$.

Рассмотрим инвариантные полилинейные формы

$$\sum \Phi(i_1 i_2 \dots i_f) x_{i_1} y_{i_2} \dots z_{i_f},$$

зависящие от $f$ ковариантных векторов $x, y, \dots, z$, где $\Phi$ пробегает неприводимое множество $P^*(f_1 \dots f_n)$ всех контравариантных тензоров, обладающих симметрией $T(f_1 \dots f_n)$. Выполняя подстановку, аналогичную (5.1),

$$x = [\xi^{(1)} \dots \xi^{(n-1)}], \quad \dots, \quad z = [\zeta^{(1)} \dots \zeta^{(n-1)}],$$

мы получаем инвариантное множество $\Sigma$ форм, линейно зависящих от $(n-1)f$ контравариантных векторов, т. е. совокупность ковариантных тензоров ранга $(n-1)f$. Соответствующие представления разнятся множителем $\Delta^f$; поэтому $\Sigma$, так же как и $P^*(f_1 \ldots f_n)$, неприводимо и, следовательно, подобно некоторому $P(f_1^* \ldots f_n^*)$. Это показывает, что контравариантные тензоры, обладающие симметрией $T(f_1 \ldots f_n)$, образуют примитивную величину некоторой сигнатуры

$$(f'_1, \ldots, f'_n); \qquad f'_i = f^*_i - f.$$

Чтобы доказать, что

$$f'_i = -f_{n+1-i}, \tag{5.5}$$

я воспользуюсь формальным применением *характеров*. При этом я постараюсь провести рассуждение так, чтобы его можно было непосредственно перенести на ортогональную и другие группы. Будут рассматриваться лишь „диагональные“ преобразования

$$x'_i = \varepsilon_i x_i \tag{5.6}$$

из $GL(n)$. Под действием преобразования (5.6) каждая тензорная компонента $F_\alpha = F(i_1 \ldots i_f)$ приобретает множитель

$$\eta_\alpha = \varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_f},$$

ее „вес“. Каждое инвариантное подпространство $\Sigma$ пространства $P_f$ характеризуется некоторым числом линейных уравнений, связывающих $n^f$ тензорных компонент $F_\alpha$. В силу этих уравнений некоторое число тензорных компонент $F_\beta$ (с весами $\eta_\beta$) линейно независимы в $\Sigma$, причем каждая тензорная компонента $F_\alpha$ в $\Sigma$ линейно выражается через этот базис $F_\beta$. Оказывается, что $F_\alpha$ может быть комбинацией лишь тех $F_\beta$, которые имеют тот же вес, что и $F_\alpha$. Это утверждение является частным случаем общей теоремы (III.1.E). Повторим доказательство. Пусть

$$F_\alpha = \sum_\beta b_\beta F_\beta \tag{5.7}$$

— соотношение, выполняющееся для всех тензоров $F$ из $\Sigma$. Так как $\Sigma$ инвариантно относительно подстановки (5.6), то тензор с компонентами $\eta_\alpha F_\alpha$ также лежит в $\Sigma$:

$$\eta_\alpha F_\alpha = \sum_\beta b_\beta \eta_\beta F_\beta. \tag{5.8}$$

Умножая (5.7) на $\eta_\alpha$ и вычитая из (5.8), получаем:

$$\sum_\beta b_\beta (\eta_\beta - \eta_\alpha) F_\beta = 0.$$

Следовательно,

$$b_\beta (\eta_\beta - \eta_\alpha) = 0,$$

откуда $b_\beta = 0$, когда $\eta_\beta \neq \eta_\alpha$. Поэтому мы можем определить базис $F_\beta$, выбирая по базису для тензорных компонент *каждого веса в отдельности*; члены, соответствующие различным весам, будут автоматически линейно независимы. Если в $\Sigma$ в качестве координат взять базисные $F_\beta$, то преобразование, индуцированное в $\Sigma$ преобразованием (5.6), будет также диагональной формы, и если $k_{m_1 \dots m_n}$ есть число базисных компонент веса

$$\eta = \varepsilon_1^{m_1} \dots \varepsilon_n^{m_n},$$

то след этого преобразования — *характер* — *будет полиномом*

$$\sum k_{m_1 \dots m_n} \varepsilon_1^{m_1} \dots \varepsilon_n^{m_n}$$

*с целыми неотрицательными коэффициентами* $k$.

Расположим члены этого полинома в лексикографическом порядке. Для $\Sigma = \mathrm{P}(f_1 \dots f_n)$ наивысшим возможным весом служит $\varepsilon_2^{f_1} \dots \varepsilon_n^{f_n}$ и, согласно лемме (IV.4.B) и ее доказательству, имеется точно одна линейно независимая компонента этого веса, а именно

$$F\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \dots \\ 2 & 2. & . \, . \\ . & . & . \\ n \dots & & \end{pmatrix}.$$

Следовательно, характер начинается с члена

$$1 \cdot \varepsilon_1^{f_1} \dots \varepsilon_n^{f_n}.$$

Тем же способом легко убеждаемся в том, что членом наинизшего веса служит $\varepsilon_1^{f_n} \dots \varepsilon_n^{f_1}$. Этот результат справедлив для представления сигнатуры $(f_1, \dots, f_n)$ независимо от того, будет ли $f_n \geqslant 0$ или $< 0$.

Преобразование (5.6) сопровождается преобразованием

$$\xi_i' = \frac{1}{\varepsilon_i} \xi_i$$

для контравариантных векторов $\xi$. Поэтому характер для $\mathrm{P}^*(f_1 \dots f_n)$ получается из характера для $\mathrm{P}(f_1 \dots f_n)$ путем замены каждого $\varepsilon_i$ на $\frac{1}{\varepsilon_i}$. Это обращает лексикографический порядок, и потому старшим членом в характере для $\mathrm{P}^*(f_1 \dots f_n)$ служит

$$\varepsilon_1^{-f_n} \dots \varepsilon_n^{-f_1},$$

что и доказывает наше утверждение (5.5). Так как сумма

$$\sum F(i_1 \dots i_f) \Phi(i_1 \dots i_f)$$

инвариантна, то представления $\langle \mathrm{P}(f_1 \dots f_n) \rangle$ и $\langle \mathrm{P}^*(f_1 \dots f_n) \rangle$ контрагредиентны друг к другу. Таким образом,

$$\langle f_1, \dots, f_n \rangle \text{ и } \langle -f_n, \dots, -f_1 \rangle$$

суть контрагредиентные типы, и это остается справедливым даже при $f_n < 0$.

Теорема (IV.5.A). *Контравариантные тензоры, обладающие симметрией*

$$T(f_1 \dots f_n) \qquad (f_n \geqslant 0),$$

*составляют примитивную величину сигнатуры* $(-f_n, \dots, -f_1)$. *Неприводимые представления сигнатур*

$$(f_1, \dots f_n) \text{ и } (-f_n, \dots, -f_1)$$

*контрагредиентны друг к другу (даже если* $f_n < 0$).

Обобщение, состоящее в введении множителя $\Delta^e$ с отрицательным показателем $e$, приводит к тому, что типы обобщенных величин оказываются замкнутыми не только относительно умножения, но и относительно „обращения“ — операции замены типа контрагредиентным к нему.

В самом начале нашего исследования мы установили тождества Капелли и показали, как с их помощью индуктивно приводить формы, зависящие от любого числа векторных аргументов, к формам от не более чем $n$ или даже $n-1$ аргументов. Теперь мы в состоянии провести эту индукцию несколько более прямым путем. „Разложение“ (4.3) может рассматриваться как его результат [5]. С тензором $F(i_1 \dots i_f)$ мы ассоциируем полилинейную форму

$$L(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(f)}) = \sum_{i_1, \dots, i_f} F(i_1 \dots i_f) \xi^{(1)}_{i_1} \dots \xi^{(f)}_{i_f}$$

от $f$ (котравариантных) векторов $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(f)}$. Мы проводим операцию $\boldsymbol{c}$ над $F$ в два шага: сперва симметризацию $\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{p}$, а затем альтернирование $\boldsymbol{b} = \sum \delta_q \boldsymbol{q}$. Первый шаг выполняем в два этапа: мы отождествляем первые $f_1$ векторов $\xi^{(1)} = \dots = \xi^{(f_1)} = \xi$, далее следующие $f_2$, $\xi^{(f_1+1)} = \dots = \xi^{(f_1+f_2)} = \eta$, и т. д., а затем полученную так форму $L_0(\xi, \eta, \dots)$, зависящую более чем от $n$ аргументов $\xi, \eta, \dots$, подвергаем полной поляризации. В силу (3.9), равенство (4.3) показывает тогда, что $L$ есть линейная комбинация форм, получающихся путем полной поляризации из форм

$L_0(\xi, \eta, \ldots)$, зависящих не более чем от $n$ аргументов; в последнем процессе аргументы $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(f)}$ используются во всех $f!$ возможных их перестановках, тогда как $L_0(\xi, \eta, \ldots)$ получается из $L$ путем определенного отождествления ее аргументов $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(f)}$ (между собой и) с аргументами $\xi, \eta, \ldots$ формы $L_0$. Если $L$ инвариантна относительно заданной группы линейных преобразований, то это же верно и для всех $L_0(\xi, \eta, \ldots)$, равно как и для форм, получающихся из $L_0$ путем поляризации.

Мы можем сделать еще один дальнейший шаг в согласии с тем, что мы назвали специальным тождеством Капелли. Если диаграмма $T$ содержит $e > 0$ столбцов длины $n$, то $T$ соответствует разбиению

$$(f_1 + e, \ldots, f_{n-1} + e, e),$$

и тензоры $F$, обладающие симметрией $T$, или ассоциированные с ними формы $L$ будут тогда типа

$$[\xi'\eta' \ldots \zeta'] \ldots [\xi^{(e)}\eta^{(e)} \ldots \zeta^{(e)}] \cdot L',$$

где $L'$ принадлежит диаграмме $T(f_1 \ldots f_{n-1} 0)$, содержащей лишь $n-1$ строк. Поэтому $L'$ получается путем поляризации и альтернирования из формы, зависящей от $n-1$ аргументов, и будет по крайней мере относительным инвариантом под действием заданной линейной группы, если таковым является $L$ (с изменением веса на множитель $\Delta^{-e}$).

Важность полной линейной группы $GL(n)$ заключается в том факте, что любая группа $\Gamma$ линейных преобразований является подгруппой группы $GL(n)$ и потому разложение тензорного пространства относительно $GL(n)$ должно предшествовать разложению относительно $\Gamma$. Не следует, однако, переоценивать эту связь; действительно, в конце концов каждая группа имеет право на самостоятельное существование и не заслуживает того, чтобы ее рассматривали лишь как подгруппу чего-то другого — будь это даже Ее Всеобъемлющее Величество $GL(n)$.

# *ГЛАВА V*

# ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА

## А. ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА И ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ИДЕАЛ

### 1. Снова о векторных инвариантах унимодулярной группы

Для каждой из классических групп в $n$-мерном пространстве **P**, как $GL(n)$ и $O(n)$, мы найдем соответствующую ей алгебру $\mathfrak{A}_f$ бисимметричных преобразований в тензорном пространстве $\mathbf{P}_f$. Эти алгебры содержатся в алгебре *всех* бисимметричных преобразований, и в этой роли всеобщего вместилища последняя алгебра будет впредь обозначаться через $\mathfrak{R}_f$. Желая одновременно исследовать все тензорные пространства $\mathbf{P}_v$ рангов $v \leqslant f$, мы будем нанизывать бисимметричные преобразования $A_v$ из $\mathbf{P}_v$ в одну матрицу

$$A^{(f)} = \left\| \begin{matrix} A_f & & & & \\ & A_{f-1} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & A_0 \end{matrix} \right\|, \tag{1.1}$$

$$A_v = \| a(i_1 \ldots i_v;\ k_1 \ldots k_v) \|.$$

Совокупность всех матриц $A^{(f)}$ с произвольными бисимметричными компонентами $A_v$ образует алгебру $\mathfrak{R}^{(f)}$.

Для каждой заданной группы $\Gamma$ линейных преобразований $A = \| a(ik) \|$ в $n$-мерном векторном пространстве **P** соответствующие кронекеровские произведения

$$\Pi_f(A) = A \times A \times \ldots \times A \qquad (A \in \Gamma),$$

действующие в $\mathbf{P}_f$, образуют группу $\Pi_f(\Gamma)$, гомоморфную с $\Gamma$. $\Pi^{(f)}(A)$ есть нить (1.1) матриц $A_v = \Pi_v(A)$, а $\Pi^{(f)}(\Gamma)$ — группа, пробегаемая матрицами $\Pi^{(f)}(A)$, когда $A$ пробегают $\Gamma$. Мы собираемся определить обертывающую алгебру [1] группы $\Pi_f(\Gamma)$, используя наш общий критерий — теорему (III.5.D). Для этого нам надо рассмотреть коммутаторную алгебру $\mathfrak{B}_f$ группы $\Pi_f(\Gamma)$. Матрица

$$B = \| b(i_1 \dots i_f;\ k_1 \dots k_f) \| \tag{1.2}$$

перестановочна со всеми $\Pi_f(A)$, если

$$(A^{-1} \times \dots \times A^{-1}) B (A \times \dots \times A) = B. \tag{1.3}$$

Соотношение (1.3) означает, что форма

$$\sum_{i,k} b(i_1 \dots i_f;\ k_1 \dots k_f)\, \xi^{(1)}_{i_1} \dots \xi^{(f)}_{i_f}\, y^{(1)}_{k_1} \dots y^{(f)}_{k_f}, \tag{1.4}$$

зависящая от $f$ ковариантных векторов

$$y^{(1)}, \dots, y^{(f)}$$

и $f$ контравариантных векторов

$$\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(f)},$$

есть инвариант относительно группы $\Gamma$. Поэтому определение коммутаторной алгебры $\mathfrak{B}_f$ эквивалентно проблеме векторных инвариантов, разрешаемой первой основной теоремой теории инвариантов. Обращаясь к $\Pi^{(f)}(\Gamma)$, мы должны задаться вопросом, при каких условиях матрица

$$B = \left\| \begin{matrix} B_{ff} \dots B_{f0} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_{0f} \dots B_{00} \end{matrix} \right\| \tag{1.5}$$

перестановочна со всеми $\Pi^{(f)}(A)$, $A \in \Gamma$. Таким же образом находим, что

$$B_{uv} = \| b(i_1 \dots i_u;\ k_1 \dots k_v) \| \qquad (0 \leqslant u, v \leqslant f)$$

должна быть матрицей коэффициентов инварианта

$$\sum_{i,k} b(i_1 \dots i_u;\ k_1 \dots k_v)\, \xi^{(1)}_{i_1} \dots \xi^{(u)}_{i_u}\, y^{(1)}_{k_1} \dots y^{(v)}_{k_v}, \tag{1.6}$$

зависящего от $u$ контравариантных векторов $\xi$ и $v$ ковариантных векторов $y$.

В случае полной линейной группы $GL(n)$ мы смогли найти обертывающие алгебры простейшим путем; ими оказались, соответственно, $\mathfrak{K}_f$ и $\mathfrak{K}^{(f)}$. Поэтому здесь мы можем использовать наш принцип для того, чтобы заново доказать первую основную теорему относительно векторных инвариантов группы $GL(n)$; это и будет выполнено в настоящем параграфе. В более же сложных случаях, и в частности для ортогональной группы, тот же принцип позволит нам с помощью теоремы (II.9.А), зная целый рациональный базис для векторных инвариантов, получить обертывающую алгебру.

В линейной совокупности $\mathrm{P}_f$ всех тензоров $F(i_1 \ldots i_f)$ ранга $f$ в $n$-мерном пространстве операторы симметрии $\boldsymbol{a} = \sum a(s)\, \boldsymbol{s}$ образуют вполне приводимую матричную алгебру $\mathfrak{S}$; подстановке

$$s\colon\ 1 \longrightarrow 1',\ 2 \longrightarrow 2', \ldots,\ f \longrightarrow f' \tag{1.7}$$

соответствует матрица

$$\| \delta(i_1, k_1)\, \delta(i_2, k_2) \ldots \delta(i_f, k_f) \|. \tag{1.8}$$

Коммутаторной алгеброй алгебры $\mathfrak{S}$ служит алгебра $\mathfrak{R}_f$ всех бисимметричных матриц $A_f$ (см. стр. 139). Поэтому, согласно теореме (III.5.B), $\mathfrak{S}$ является коммутаторной алгеброй для $\mathfrak{R}_f$. Следовательно, матрица коэффициентов любого инварианта (1.4) должна быть линейной комбинацией матриц вида (1.8), которым соответствуют инварианты

$$(\xi^{(1')} y^{(1)})\, (\xi^{(2')} y^{(2)}) \ldots (\xi^{(f')} y^{(f)}). \tag{1.9}$$

Иными словами: каждый инвариант, линейно зависящий от $f$ ковариантных векторов $y$ и $f$ контравариантных векторов $\xi$, выражается через произведения типа $(\xi y)$. В выражении (1.9) подстановка (1.7) предстает как соединение в супружеские пары $f$ „мужских“ символов $y$ с $f$ „женскими“ символами $\xi$.

Отсюда довольно легко удается вновь получить нашу старую таблицу

$$[xy \ldots z], \qquad (\xi x), \qquad [\xi\eta \ldots \zeta]$$

как полную совокупность типовых базисных инвариантов для унимодулярной группы. Пусть требуется рассмотреть инварианты $J$, зависящие от некоторого числа латинских и греческих аргументов. Путем полной поляризации можно добиться, чтобы $J$ были линейны по каждому аргументу. Покажем тогда, что разность $h$ между числом латинских и греческих аргументов должна быть кратной $n$, $h = ng$, и что $J$ при линейном преобразовании с определителем $a$ переходит в $a^g \cdot J$. В самом деле, рассмотрим действие, оказываемое на $J$ следующими двумя подстановками:

$$aE = \begin{Vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad (a) = \begin{Vmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}$$

Первая переводит $J$ в $a^h \cdot J$, вторая — в сумму $\sum_i a^i F_i$; показатели $h$ и $i$ являются целыми, хотя и не обязательно положительными. Заменяя во втором преобразовании $a$ на $a^n$ и замечая, что $(a^n)$ и $aE$ разнятся унимодулярным преобразованием $A_0$,

$$(a^n) = aA_0,$$

получаем следующее тождество относительно $a$:

$$a^h \cdot J = \sum_i F_i a^{ni}.$$

Оно показывает, что в правой части фактически присутствует лишь один член с $i = g$, причем $h = ng$ и $F_g = J$. Поэтому подстановка $(a)$, и, следовательно, каждая подстановка с определителем $a$, превращает $J$ в $a^g \cdot J$.

В случае $g = 0$, когда имеется одинаковое число $f$ латинских и греческих аргументов, $J$ есть абсолютный инвариант и потому выражается через произведения $(\xi x)$. Если, однако, число латинских аргументов превышает число греческих на $n$ $(g = 1)$, то вводим $n$ вспомогательных греческих аргументов $\xi'$, $\eta'$, …, $\zeta'$ и выражаем абсолютный инвариант

$$J \cdot [\xi'\eta' \ldots \zeta'] \tag{1.10}$$

через произведения $(\xi x)$. Выражение (1.10) кососимметрично относительно $\xi'$, $\eta'$, …, $\zeta'$; поэтому, произведя все $n!$ перестановок аргументов $\xi'$, $\eta'$, …, $\zeta'$ и образуя знакопеременную сумму, мы получим для

$$n!\, J \cdot [\xi'\eta' \ldots \zeta']$$

выражение, в каждом члене которого множитель вида

$$(\xi' x) \ldots (\zeta' z)$$

заменится определителем

$$\begin{vmatrix} (\xi' x) \ldots (\zeta' x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\xi' z) \ldots (\zeta' z) \end{vmatrix}.$$

Так как этот определитель равен

$$[xy \ldots z]\,[\xi'\eta' \ldots \zeta'],$$

то вспомогательный множитель $[\xi'\eta' \ldots \zeta']$ можно сократить. Этот процесс следует повторно применить, если число латинских аргументов превосходит число греческих на $2n$ или $3n$ и т. д., и ясно, что надо сделать, если, наоборот, последнее число больше чем первое.

## 2. Обертывающая алгебра ортогональной группы

Нижеследующая лемма важна во многих случаях:

Лемма (V.2.A). *Каждое множество ортогональных преобразований над вещественным полем $k$ вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{P}$ — векторное пространство, в котором действуют ортогональные преобразования $C$ из заданного множества $\{C\}$. Для каждого подпространства $\mathrm{P}'$ пространства $\mathrm{P}$, инвариантного относительно $\{C\}$, строим подпространство $\mathrm{P}''$, ортогональное к $\mathrm{P}'$ в $\mathrm{P}$: вектор $\mathfrak{x}''$ лежит в $\mathrm{P}''$, если он ортогонален ко всем векторам $\mathfrak{x}'$ из $\mathrm{P}'$. Ясно, что $\mathrm{P}''$, как и $\mathrm{P}'$, инвариантно относительно всех ортогональных подстановок $C$. Если $n'$ — размерность и $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{n'}$ — базис подпространства $\mathrm{P}'$, то общий вектор $\mathfrak{x}''$ подпространства $\mathrm{P}''$ подчинен $n'$ независимым однородным линейным уравнениям

$$(\mathfrak{e}_1\mathfrak{x}'') = 0, \ \ldots, \ (\mathfrak{e}_{n'}\mathfrak{x}'') = 0.$$

Поэтому размерность $n''$ подпространства $\mathrm{P}''$ равна $n - n'$, и для обоснования разложения $\mathrm{P} = \mathrm{P}' + \mathrm{P}''$ остается еще установить, что $\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}''$ ($\mathfrak{x}' \in \mathrm{P}'$, $\mathfrak{x}'' \in \mathrm{P}''$) может быть нулем лишь, если оба слагаемых равны нулю. Но умножая обе части равенства

$$\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'' = 0$$

скалярно на $\mathfrak{x}'$, получаем $(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}') = 0$, откуда, вследствие вещественности основного поля, заключаем, что $\mathfrak{x}' = 0$.

Пусть теперь $A = \| a(ik) \|$ пробегает ортогональную группу $O(n)$. Тогда $\Pi_f(A)$ будет пробегать *группу* $\Pi_f(O)$, *индуцируемую группой* $O(n)$ *в тензорном пространстве* $\mathrm{P}_f$ *ранга* $f$. В этом тензорном пространстве мы можем ввести *метрику*, определив скалярное произведение двух тензоров $F$ и $G$ формулой

$$(2.1) \qquad (F, G) = \sum F(i_1 \ldots i_f)\, G(i_1 \ldots i_f) \quad (i_1, \ldots, i_f = 1, \ldots, n).$$

Заметим теперь, что матрица $\Pi_f(A)$ ортогональна в $\mathrm{P}_f$, коль скоро матрица $A$ ортогональна в $\mathrm{P}$. Поэтому наша лемма показывает, что *над вещественным полем группа* $\Pi_f(O)$ *вполне приводима.*

Матрицы $A^{(f)} = \Pi^{(f)}(A)$, индуцированные *ортогональной* матрицей $A$, очевидно, удовлетворяют линейным уравнениям

$$(2.2_l) \quad \sum_{k=1}^{n} a(i_1 i_2 i_3 \ldots i_v;\ k k k_3 \ldots k_v) - \\ - \delta(i_1 i_2) \cdot a(i_3 \ldots i_v;\ k_3 \ldots k_v) = 0,$$

$$(2.2_k) \quad \sum_{i=1}^{n} a(i i i_3 \ldots i_v;\ k_1 k_2 k_3 \ldots k_v) - \\ - \delta(k_1 k_2) \cdot a(i_3 \ldots i_v;\ k_3 \ldots k_v) = 0$$

$(v = 2, \ldots, f)$. Матрицы $A^{(f)}$, (1.1), из $\mathfrak{K}^{(f)}$, удовлетворяющие этим условиям, как легко проверить, образуют некоторую матричную алгебру $\mathfrak{A}^{(f)}$, а их старшие члены $A_f$ — алгебру *) $\mathfrak{A}_f$. Мы утверждаем:

Теорема (V.2.B). *Над вещественным пифагоровым полем, $\mathfrak{A}^{(f)}$ есть обертывающая алгебра группы* $\Pi^{(f)}(O)$.

Это предложение (вернее, соответствующее предложение для симплектической, а не для ортогональной группы) впервые было доказано автором [3]. Более простой метод, которому мы здесь следуем, предложил Р. Брауэр, l. c.[1]. Как мы заметили вначале, множество $\Pi^{(f)}(O)$ вполне приводимо; поэтому можно будет воспользоваться критерием теоремы (III.5.D). Матрица (1.5), перестановочная со всеми $\Pi^{(f)}(A)$, состоит из матриц $B_{uv}$ коэффициентов инвариантов

$$(2.4) \quad \sum_{i,k} b(i_1 \ldots i_u;\ k_1 \ldots k_v)\, x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_u}^{(u)}\, y_{k_1}^{(1)} \ldots y_{k_v}^{(v)} \qquad (u, v = 0, \ldots, f),$$

линейно зависящих от $u + v$ векторов

$$x^{(1)}, \ldots, x^{(u)};\quad y^{(1)}, \ldots, y^{(v)}.$$

Различие между ковариантным и контравариантным в случае ортогональной группы отсутствует.

Наше доказательство основной теоремы для ортогональных инвариантов в его первой форме проходит в вещественном пифагоровом поле. Поэтому, при предположении нашей теоремы,

---

*) Матрицы из $\mathfrak{A}_f$, как легко видеть, характеризуются уравнениями [2]

$$(2.3_f) \quad \delta(k_1 k_2) \sum_{k} a(i_1 i_2 i_3 \ldots i_f;\ k k k_3 \ldots k_f) = \\ = \delta(i_1 i_2) \sum_{i} a(i i i_3 \ldots i_f;\ k_1 k_2 k_3 \ldots k_f).$$

**Это определение было бы вполне удовлетворительным, если бы мы не хотели объединить в одном рассмотрении $P_f$ с тензорными пространствами низшего ранга.**

мы знаем, что (2.4) должно быть линейной комбинацией членов, каждый из которых сопрягает наши $u+v$ аргументов $x^{(1)}, \dots, x^{(u)}$; $y^{(1)}, \dots, y^{(v)}$ в пары, образующие скалярные произведения. Однако на этот раз нет никакого различия двух „полов“. При надлежащем расположении аргументов рассматриваемый член будет произведением $\alpha$ последовательных множителей

$$(x^{(1)}x^{(2)})(x^{(3)}x^{(4)})\dots,$$

$\gamma$ последовательных множителей

$$(y^{(1)}y^{(2)})(y^{(3)}y^{(4)})\dots,$$

и $\beta$ последовательных множителей

$$\dots(x^{(u-1)}y^{(v-1)})(x^{(u)}y^{(v)})$$

($u=2\alpha+\beta$, $v=2\gamma+\beta$). Соответствующая матрица $B_{uv}$ описывается формулой

$$b(i_1\dots i_u;\ k_1\dots k_v)=\delta(i_1i_2)\dots\cdot\delta(k_1k_2)\dots\cdot\dots\delta(i_uk_v).$$

Для $A^{(f)}$, удовлетворяющего уравнениям (2.2), матрица $B_{uv}A_v$, равно как и $A_uB_{uv}$, оказывается равной

$$\|\delta(i_1i_2)\dots\delta(k_1k_2)\dots\cdot a(i_{2\alpha+1}\dots i_u;\ k_{2\gamma+1}\dots k_v)\|.$$

При этом, вычисляя произведение $B_{uv}A_v$, мы используем уравнения (2.2$_k$), вычисляя же $A_uB_{uv}$, — уравнения (2.2$_i$). Постулат бисимметрии обеспечивает свободу перестановки порядка индексов $i$ или $k$. Поэтому каждая матрица $A^{(f)}$ нашей алгебры $\mathfrak{A}^{(f)}$ перестановочна со всеми коммутаторами $B$, и критерий (III.5.D) приводит нас к цели.

В несколько другом аспекте то, что мы здесь выполнили, может быть описано как определение всех соотношений степени $f$,

$$\sum_{v=0}^{f}\sum_{i,k}\gamma(i_1\dots i_v;\ k_1\dots k_v)\,a(i_1k_1)\dots a(i_vk_v)=0, \tag{2.5}$$

существующих между ортогональными матрицами $\|a(ik)\|$. Коэффициенты $\gamma$ такого соотношения мы предполагаем записанными в „бисимметричной“ форме. Тогда соответствующее соотношение

$$\sum_{v=0}^{f}\sum_{i,k}\gamma(i_1\dots i_v;k_1\dots k_v)\,a(i_1\dots i_v;k_1\dots k_v)=0 \tag{2.6}$$

должно выполняться для всех матриц $A^{(f)}$ нашей алгебры $\mathfrak{A}^{(f)}$. Если рассматривать все величины

$$a(i_1 \ldots i_v;\ k_1 \ldots k_v)$$

как независимые переменные, однако, с самого начала принимая во внимание бисимметричность, то (2.6) должно быть линейной комбинацией левых частей уравнений (2.2). Это — применение известного принципа, согласно которому линейная форма

$$L(x) = l_1 x_1 + \ldots + l_N x_N,$$

обращающаяся в нуль для всех значений $x_p$, которые одновременно обращают в нуль линейные формы $L_1, L_2, \ldots$, необходимо является линейной комбинацией этих последних форм. Рассматривая теперь $a(ik)$ как независимые переменные и беря в частности $A^{(f)} = \Pi^{(f)}(A)$, находим, что левая часть соотношения (2.5) есть линейная комбинация полиномов

$$\left\{\sum_k a(i_1 k)\, a(i_2 k) - \delta(i_1 i_2)\right\} a(i_3 k_3) \ldots a(i_v k_v),$$

$$\left\{\sum_k a(i k_1)\, a(i k_2) - \delta(k_1 k_2)\right\} a(i_3 k_3) \ldots a(i_v k_v).$$

Иными словами:

Теорема (V.2.C). *Каждый полином $\Phi(a(ik))$ формальной степени $f$, обращающийся в нуль для всех ортогональных матриц $\|a(ik)\|$, есть комбинация*

$$\sum L_{i_1 i_2} D_{i_1 i_2} + \sum L^*_{k_1 k_2} D^*_{k_1 k_2}$$

$n(n+1)$ *частных таких полиномов второй степени:*

$$D_{i_1 i_2} = \sum_k a(i_1 k)\, a(i_2 k) - \delta(i_1 i_2),$$

$$D^*_{k_1 k_2} = \sum_i a(i k_1)\, a(i k_2) - \delta(k_1 k_2),$$

*коэффициенты которой $L_{i_1 i_2}$, $L^*_{k_1 k_2}$ суть полиномы формальной степени $f - 2$.*

## 3. Формальная отшлифовка результата

Мы снова попытаемся ослабить условия, наложенные на основное поле, и формализовать совокупность „всех“ ортогональных преобразований. Будем сначала оперировать в рациональном основном поле $\varkappa$. Вследствие его вещественности, матрицы $\Pi_f(A)$

индуцированные любым множеством рациональных ортогональных преобразований $A$, образуют множество, вполне приводимое над $\varkappa$. Вторым пунктом, где играет роль природа основного поля, является основная теорема теории инвариантов. Здесь мы прибегнем к ее формализованной интерпретации. Мы рассматриваем совокупность $\mathfrak{S}^{(f)}$ всех $\Pi^{(f)}(A)$, индуцированных рациональными неисключительными собственно ортогональными матрицами

$$A=\frac{E-S}{E+S} \tag{3.1}$$

и, кроме того, несобственно ортогональной матрицей $J_n$, (II.9.3), и заключаем из формализованной основной теоремы, что обертывающей алгеброй этой совокупности над $\varkappa$ служит та же алгебра $\mathfrak{A}^{(f)}$, определяемая нашими соотношениями (2.2). Но так как это суть однородные линейные соотношения с *рациональными* коэффициентами, то элемент $A^{(f)}$ из $\mathfrak{A}^{(f)}$, ***взятый при произвольном поле $k$ над $\varkappa$***, является линейной комбинацией конечного числа (рациональных) элементов из $\mathfrak{S}^{(f)}$. Нам будет удобно разбить формулировку нашего результата на две части:

Теорема (V.3.A). *Утверждения теорем* (V.2.B) *и* (V.2.C) *справедливы при любом поле $k$ характеристики* 0.

Дополнение. *Даже более узкое множество $\mathfrak{S}^{(f)}$ тех $\Pi^{(f)}(A)$, которые индуцированы рациональными неисключительными собственно ортогональными $A$ и матрицей $J_n$, настолько широко, что порождает в качестве своей обертывающей алгебры всю алгебру $\mathfrak{A}^{(f)}$.*

Это дополнение принимает более стройный вид на языке теоремы (V.2.C). Рассматриваем полиномы $\Phi(A)=\Phi(a(ik))$ от всех $n^2$ элементов $a(ik)$ произвольной матрицы $A=\|a(ik)\|$ с коэффициентами из поля $k$ характеристики 0. Те $\Phi$, которые после подстановки

$$A=\frac{E-S}{E+S}, \quad S=\|s_{ik}\| \text{ косо-симметрична,} \tag{3.2}$$

обращаются в нуль тождественно относительно $\frac{1}{2}n(n-1)$ переменных $s_{ik}$ $(i<k)$, образуют *идеал* $\mathfrak{o}$ — *ортогональный идеал* (над $k$). $\mathfrak{o}$ есть *простой* идеал. Действительно, если произведение двух полиномов после подстановки (3.2) обращается в нуль тождественно относительно $s_{ik}$ $(i<k)$, то это же имеет место и для одного из сомножителей.

Теорема (V.3.B). *Полиномы $D_{i_1i_2}$, $D^*_{k_1k_2}$, обращение которых в нуль определяет ортогональную группу, образуют* *для той части ортогонального простого идеала* $\mathfrak{o}$ *над* $k$, *элементы которой* $\Phi$ *удовлетворяют дополнительному условию* $\Phi(J_n)=0$, *базис в смысле теоремы* (V.2.C).

Отметим вытекающее отсюда

Следствие. *$k$-полином* $\Phi(A)$, *обращающийся в нуль при* $A=J_n$ *и при подстановке* (3.2) *тождественно относительно косо-симметричных* $S$, *обращается в нуль для каждой ортогональной матрицы* $A$ *над* $k$.

По устранении всех ограничений, относящихся к природе основного поля, ничто не мешает нам перенести все полученные результаты на произвольную невырожденную основную метрическую форму

$$\sum_{i,k}\gamma_{ik}x_ix_k.$$

## 4. Ортогональный простой идеал

Стройность наших последних результатов несколько нарушается дополнительным условием $\Phi(J_n)=0$, назначением которого является охватить и несобственно ортогональные преобразования. Включить их побудила нас чрезвычайная простота основной теоремы теории инвариантов для полной ортогональной группы. Раз мы теперь начали тяготиться ими, то единственным выходом из положения является исследование *собственно* ортогональной группы.

Собственно ортогональная матрица $A=\|a(ik)\|$ удовлетворяет соотношениям

$$D_{i_1i_2}\equiv\sum_k a(i_1k)\,a(i_2k)-\delta\,(i_1i_2)=0, \tag{4.1}$$

$$D^*_{k_1k_2}\equiv\sum_i a(ik_1)\,a(ik_2)-\delta\,(k_1k_2)=0 \tag{4.2}$$

и

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} a(11)\dots a(1n)\\ \dots\dots\dots\\ a(n1)\dots a(nn)\end{vmatrix}-1=0. \tag{4.3}$$

В качестве их следствия мы получили следующее обобщение (1.3.6) соотношения (4.3):

$$\Delta\begin{pmatrix} i_1\dots i_\rho\\ k_1\dots k_\rho\end{pmatrix}\equiv \tag{4.4}$$

$$\equiv\begin{vmatrix} a(i_1k_1)\dots a(i_1k_\rho)\\ \dots\dots\dots\\ a\ (i_\rho k_1)\dots a(i_\rho k_\rho)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a(\iota_1\varkappa_1)\dots a(\iota_1\varkappa_\sigma)\\ \dots\dots\dots\\ a(\iota_\sigma\varkappa_1)\dots a(\iota_\sigma\varkappa_\sigma)\end{vmatrix}=0.$$

Здесь $i_1 \dots i_\rho \iota_1 \dots \iota_\sigma$ и $k_1 \dots k_\rho \varkappa_1 \dots \varkappa_\sigma$ суть четные перестановки ряда $1, 2, \dots, n$. Поэтому $\rho + \sigma = n$ и можно без ограничения общности считать, что

$$\rho \geqslant \sigma \text{ и } i_1 < \dots < i_\rho,\; k_1 < \dots < k_\rho. \tag{4.5}$$

Для матрицы $A^{(f)}$, индуцированной собственно ортогональной матрицей $A$, (4.4) приводит к соотношениям типа

$$\sum_{1', \dots, \rho'} \pm a(i_1 \dots i_\rho i_{\rho+1} \dots i_v;\; k_{1'} \dots k_{\rho'} k_{\rho+1} \dots k_v) = \\ = \sum_{1', \dots, \sigma'} \pm a(\iota_1 \dots \iota_\sigma i_{\rho+1} \dots i_v;\; \varkappa_{1'} \dots \varkappa_{\sigma'} k_{\rho+1} \dots k_v). \tag{4.6}$$

Здесь $v \leqslant f$ и снова $\rho \geqslant \sigma$, а $i_1 \dots i_\rho \iota_1 \dots \iota_\sigma$ и $k_1 \dots k_\rho \varkappa_1 \dots \varkappa_\sigma$ суть четные перестановки ряда $1, 2, \dots, n$. В левой части стоит знакопеременная сумма, распространенная на все перестановки $1', \dots, \rho'$ ряда $1, \dots, \rho$, и аналогичная сумма — в правой части. Благодаря бисимметричности матриц $A_v$, левая часть косо-симметрична относительно $i_1, \dots, i_\rho$, правая же часть — относительно $\iota_1, \dots, \iota_\sigma$. Левая часть тождественно совпадает с результатом альтернирования по индексам строк $i$, т. е. с

$$\sum_{1', \dots, \rho'} \pm a(i_{1'} \dots i_{\rho'} i_{\rho+1} \dots i_v;\; k_1 \dots k_\rho k_{\rho+1} \dots k_v).$$

Уравнения (4.6) вместе с (2.2) определяют внутри $\mathfrak{K}^{(f)}$ некоторую алгебру $\mathfrak{A}^{(f)}_{+}$.

Теорема (V.4.A). *Алгебра $\mathfrak{A}^{(f)}_{+}$, определенная уравнениями (4.6) и (2.2), есть обертывающая алгебра группы $\Pi^{(f)}(O^{+}(n))$.*

Доказательство проводится тем же путем, что и раньше. Выражение (2.4), будучи инвариантом относительно *собственно* ортогональных преобразований, является суммой членов, каждый из которых может содержать, кроме множителей указанных раньше типов, еще *один* множитель типа

$$[x^{(1)} \dots x^{(\rho)} y^{(1)} \dots y^{(\sigma)}].$$

Для доказательства того, что каждый элемент $A^{(f)}$ из $\mathfrak{A}^{(f)}_{+}$ перестановочен с таким $B$, следует использовать уравнения (4.6). Это — дело прямого вычисления; я предоставляю его читателю, так как в печатном виде, вследствие обилия индексов, вычисление выглядело бы более сложным, чем есть на самом деле*).

---

*) Алгебра первых членов [2] определится для нечетной размерности $n$ уравнениями $(2.3_f)$; в случае четного $n$, $n = 2\nu$, следует присоединить уравнения (4.6), соответствующие $v = f$, $\rho = \sigma = \nu$.

И здесь можно ограничиться в группе $\Pi^{(f)}(O^+(n))$ неисключительными рациональными $A$; в результате получим:

**Теорема** (V.4.B). *Каждый полином формальной степени* $f$ *в ортогональном идеале* $\mathfrak{O}$ *является комбинацией*

$$\sum L_{i_1i_2}D_{i_1i_2}+\sum L^*_{k_1k_2}D^*_{k_1k_2}+\sum_{\rho\geqslant n-\rho}\Lambda\begin{pmatrix}i_1\dots i_\rho\\ k_1\dots k_\rho\end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix}i_1\dots i_\rho\\ k_1\dots k_\rho\end{pmatrix}$$

*базисных полиномов* (4.1), (4.2), (4.4), *коэффициенты которой*

$$L_{i_1i_2},\quad L^*_{k_1k_2},\quad \Lambda\begin{pmatrix}i_1\dots i_\rho\\ k_1\dots k_\rho\end{pmatrix}$$

*суть соответственно полиномы формальных степеней* $f-2$, $f-2$, $f-\rho$.

Как известно, уравнения

$$|A|^2=1,\quad D_{i_1i_2}=0$$

являются следствиями уравнений $D^*_{k_1k_2}=0$, определяющих ортогональность. Верно ли это не только в численном, но и в формальном смысле идеалов? Другими словами, верно ли, что для независимых переменных $a(ik)$,

$$|A|^2-1\equiv 0 \quad \text{и} \quad D_{i_1i_2}\equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\, D^*_{k_1k_2})?$$

Ответ оказывается утвердительным. Что касается первого сравнения, то нужно лишь повторить численное доказательство, рассматривая $|A|^2$ как определитель матрицы $A^*A$. Далее, $D_{i_1i_2}$ и $D^*_{k_1k_2}$ суть соответственно элементы матриц $AA^*-E$ и $A^*A-E$. Имеем:

$$A^*(AA^*-E)=(A^*A-E)A^*\equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\, D^*_{k_1k_2}).$$

Пользуясь минорами матрицы $A^*$, выводим отсюда дальнейшие соотношения

$$\begin{aligned}|A|\cdot(AA^*-E)&\equiv 0\\ |A|^2\cdot(AA^*-E)&\equiv 0\end{aligned} \qquad (\mathrm{modd}\, D^*_{k_1k_2})$$

и, наконец, на основании доказанного уже соотношения $|A|^2\equiv 1$, — сравнения

$$AA^*-E\equiv 0 \quad \text{или} \quad D_{i_1i_2}\equiv 0 \qquad (\mathrm{modd}\, D^*_{k_1k_2}).$$

Таким образом, каждое $D=D_{i_1i_2}$ выражается в виде суммы

$$\sum L^*_{k_1k_2}D^*_{k_1k_2}.$$

Однако это выражение не удовлетворяет условию относительно формальных степеней, являвшемуся характерной особенностью наших теорем (V.2.C) и (V.4.B) и потребовавшему бы здесь, чтобы $\overset{*}{L}_{k_1k_2}$ имели нулевую степень (согласно нашему доказательству, степень повысится до $2n$). Поэтому присоединение полиномов $D_{i_1i_2}$ к $\overset{*}{D}_{k_1k_2}$ излишне, если нашей целью является лишь нахождение базиса идеала $\mathfrak{o}$; но оно не излишне, если требуется учитывать условие относительно формальных степеней.

В том же формальном смысле сравнений по идеалу все соотношения (4.4) являются следствием совокупности соотношений $\overset{*}{D}_{k_1k_2}=0$ и $|A|=1$. Пусть $M=\|A(ik)\|$ — матрица миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $A=\|a(ik)\|$. Тогда, тождественно относительно $a(ik)$, имеем

$$M^*A=|A|E,$$

откуда

$$M^*A\equiv A^*A \qquad (\text{modd } \overset{*}{D}_{k_1k_2},\ \Delta);$$

поэтому, относительно тех же модулей,

$$(M^*-A^*)\,|A|\equiv 0,$$

откуда, принимая во внимание, что $|A|\equiv 1$, получаем:

$$M^*\equiv A^* \text{ или } M\equiv A. \tag{4.7}$$

Это есть соотношение

$$\Delta\begin{pmatrix} i_1\dots i_{n-1}\\ k_1\dots k_{n-1}\end{pmatrix}\equiv 0. \tag{4.8}$$

Вывод из (4.7) соотношений для миноров $\Delta$ низшего порядка, кратко намеченный в § 3 главы I, остается в силе и при замене равенств сравнениями (modd $\overset{*}{D}_{k_1k_2}$, $\Delta$). Таким образом, если отбросить постулат относительно формальной степени, то наша теорема просто утверждает, что полиномы

$$\sum_i a(ik_1)\,a(ik_2)-\delta(k_1k_2),\quad \det(a(ik))-1 \tag{4.9}$$

образуют базис в $\mathfrak{o}$. (Разумеется, здесь роль $\overset{*}{D}_{k_1k_2}$ могут играть и $D_{i_1i_2}$.)

Мы имеем выбор между следующими тремя определениями ортогонального идеала $\mathfrak{o}$ над полем $k$:

(1) $\Phi$ принадлежит $\mathfrak{o}$, если $\Phi(A)$ при подстановке (3.2) обращается в нуль тождественно относительно $s_{ik}$.

(2) $\Phi$ принадлежит $\mathfrak{o}$, если $\Phi(A)$ обращается в нуль для каждой собственно ортогональной матрицы $A$ над $k$.

(3) $\mathfrak{o}$ есть идеал с базисом (4.9).

Если сначала различать идеалы, удовлетворяющие этим трем определениям, символами $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$, $\mathfrak{o}_3$, то, очевидно, будем иметь

$$\mathfrak{o}_3 \subseteqq \mathfrak{o}_2 \subseteqq \mathfrak{o}_1.$$

Но, как мы теперь доказали, $\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}_3$, и потому все три определения эквивалентны. Наиболее удобно взять за исходный пункт естественное определение (2); тогда (1) показывает, что $\mathfrak{o}$ есть простой идеал, имеющий (3.2) в качестве своего „общего корня“ (см. ван дер Варден „Современная алгебра“, 2-е изд., ч. II, стр. 67), тогда как (3) дает конечный базис идеала $\mathfrak{o}$.

Теорема (V.4.C). *Идеал $\mathfrak{o}$, состоящий из $k$-полиномов $\Phi(A)$, обращающихся в нуль для всех собственно ортогональных матриц $A$ над $k$, есть простой идеал с общим нулем* (3.2) *и с конечным базисом* (4.9).

Первое утверждение теоремы на „геометрическом“ языке означает, что *собственно ортогональная группа есть неприводимое алгебраическое многообразие в $n^2$-мерном пространстве всех матриц $n$-го порядка, причем это верно при любом поле $k$ характеристики* 0.

Для формулировки более тонкого результата удобнее перейти к однородным переменным, путем подстановки $\frac{a(ik)}{a}$ вместо $a(ik)$. Тогда мы оперируем в области $n^2+1$ переменных $a(ik)$, $a$ и рассматриваем в ней однородные формы. В частности, мы пишем теперь

$$D_{i_1 i_2} = \sum_k a(i_1 k)\, a(i_2 k) - a^2 \delta(i_1 i_2), \tag{4.10}$$

$$D^*_{k_1 k_2} = \sum_i a(i k_1)\, a(i k_2) - a^2 \delta(k_1 k_2), \tag{4.11}$$

$$\Delta\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\rho \\ k_1 \dots k_\rho \end{pmatrix} = \tag{4.12}$$

$$= \begin{vmatrix} a(i_1 k_1) \dots a(i_1 k_\rho) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a(i_\rho k_1) \dots a(i_\rho k_\rho) \end{vmatrix} - a^{\rho-\sigma} \begin{vmatrix} a\,\iota_1 \varkappa_1) \dots a(\iota_1 \varkappa_\sigma) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a(\iota_\sigma \varkappa_1) \dots a(\iota_\sigma \varkappa_\sigma) \end{vmatrix}$$

с условиями, принятыми в (4.4), включая $\rho \geqslant \sigma$. Ортогональная группа дополняется теперь растяжениями; расширенная так группа есть неприводимое алгебраическое многообразие в $n^2$-мерном проективном пространстве с $n^2+1$ однородными координатами $a(ik)$, $a$, и наша теорема (V.4.B) определяет естественный ее базис:

Теорема (V. 4. D). *Идеал форм от* $n^2+1$ *переменных* $a(ik)$, $a$, *базис которого образуют выражения* (4.10), (4.11), (4.12), *является простым. Именно, он содержит все те и только те формы* $\Phi(a(ik), a)$, *которые обращаются в нуль при подстановке*

$$a=1, \qquad A=\frac{E-S}{E+S}, \qquad S \text{ косо-симметрична.}$$

## 5. Абстрактная алгебра, связанная с ортогональной группой

Представляется небезынтересным явно определить ту абстрактную алгебру, которая для ортогональной группы играет такую же роль, как группа подстановок $s$ для полной линейной группы. В последнем случае подстановки появляются под такой личиной. Мы имеем $f$ „мужских“ символов $y_1, \ldots, y_f$ и $f$ „женских“ символов $\xi_1, \ldots, \xi_f$ и каждая „единица“ (базисный элемент) $s$ группового кольца есть сочетание их в разнополые пары $(\xi y)$, как в (1.9). Композиция $st$ двух таких единиц $s$ и $t$, записанных соответственно в буквах $\xi y$, $\eta z$, выполняется путем свертывания произведений вида $(\xi y_i)(\eta_i z)$ в $(\xi z)$. При интерпретации $s$, как оператора в области тензоров ранга $f$, „мужские“ $y$ следует интерпретировать как ковариантные, а „женские“ $\xi$ — как контравариантные векторы, сочетание же $(\xi y)$ означает образование их произведения. Однако это представление является точным лишь, если размерность $n$ нашего пространства $\geqslant f$; в противном случае появятся линейные зависимости, связывающие единицы, как, например,

$$\begin{vmatrix} (\xi_1 y_1) \ldots (\xi_1 y_f) \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ (\xi_f y_1) \ldots (\xi_f y_f) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.1}$$

отсутствующие в абстрактной области.

Аналогия очевидна. Ограничимся, в случае ортогональной группы, рассмотрением одной матрицы $A_f$ вместо всего ряда $A_f$, $A_{f-1}, \ldots, A_0$, и в соответствии с этим выделим из определенных ранее перестановочных с $A^{(f)}$ матриц $B$, (1.5), часть $B_{ff}$, Матрицы $B_{ff}$ образуют алгебру $\omega_f^n$, каждую единицу которой можно снова описать как сочетание $f$ символов $x$ и $f$ символов $y$ в пары, однако уже без различения „полов". Композиция двух единиц, выраженных, соответственно, в символах $xy$ и $yz$, выполняется по правилу, подобному предшествующему: произведение вида

$$(uy_i)(y_iv)$$

заменяется на $(uv)$, произведение $(y_iy_i)$, если оно появляется в результате свертывания, заменяется числом $n$. Здесь $u$ есть $x$ или $y$, а $v$ есть $z$ или $y$. Результат свертываний не зависит от порядка, в котором они производятся; действительно, единственными возможностями являются „цепи" типа

$$(uy_1)(y_1y_2)\ldots(y_{l-1}v) \quad (u,\ v \text{ есть } x \text{ или } z)$$

и „кольца" типа

$$(y_1y_2)(y_2y_3)\ldots(y_ly_1),$$

которые свертываются, соответственно, в

$$(uv) \quad \text{и} \quad n.$$

(Между прочим, цепь нечетной длины $l$ связывает $x$ с $x$ или $z$ с $z$, тогда как цепь четной длины соединяет $x$ с $z$; кольца необходимо имеют четную длину $l$.) То, что мы получили, есть почти, но, все же, не совсем группа: произведение двух единиц может быть не просто единицей, а единицей, умноженной на некоторую степень $n$; и некоторые единицы — во всяком случае все, содержащие „однополые" пары, вовсе не допускают обращения. Легкий подсчет показывает, что порядком $\omega_f^n$ служит $1\cdot3\ldots(2f-1)$. Число $n$ уже с самого начала играет роль в определении нашей алгебры $\omega_f^n$, чего не было в случае группы подстановок $\pi_f$. Там $n$ не появлялось до тех пор, пока мы не перешли от абстрактной алгебры к ее представлению операторами в тензорном пространстве $\mathrm{P}_f$ ранга $f$, соответствующем $n$-мерному векторному пространству $\mathrm{P}$. Аналогичное представление нашей теперешней алгебры $\omega_f^n$ интерпретирует символы $x$ и $y$ как векторы в ортогональном $n$-мерном пространстве, а сочетания $(xx)$, $(xy)$ или $(yy)$ — как скалярные произведения. До сих пор $\omega_f^n$ и имелось только в этой конкретной форме. Указанное представление — во всяком случае точное при $n \geqslant 2f$; действительно, скалярные произведения $2f$ векторов $x_1, \ldots, x_f, y_1, \ldots, y_f$ пространства $2f$ или большего числа измерений алгебраически независимы. Оно не является точным при $n < f$, так как тогда имеет место соотношение (5.1) с заменой $\xi$ на $x$. Я не стану тратить время на заполнение пробела, оставшегося между этими двумя пределами [4].

Более важен вопрос о полной приводимости. $\mathfrak{A}_f$ есть коммутаторная алгебра алгебры $\omega_f^n$ в ее конкретной форме или представлении $\mathfrak{B}_f = \{B_{ff}\}$. Предположим, что в нашем распоряжении имелась бы теория алгебры $\omega_f^n$ того же типа, что и теория симметрической группы $\pi_f$, изложенная в главе IV, и, в частности, говорящая нам, что $\omega_f^n$ вполне приводима над основным полем $\varkappa$ и что неприводимые ее составляющие остаются неприводимыми и при любом поле $k$ над $\varkappa$. С помощью общих теорем раздела А главы III мы могли бы вывести отсюда разложение алгебры $\mathfrak{A}_f$ на ее (абсолютно) неприводимые составляющие. Мы могли бы даже надеяться получить более элементарное и полное соответствие, подобное установленному в разделе В главы III. И мы действительно предпримем построение последнего типа, но с помощью простого приема нам удастся установить контакт с хорошо известной симметрической группой $\pi_f$ вместо этой несколько загадочной алгебры $\omega_f^n$. На это время мы просим читателя забыть, что $\mathfrak{A}^{(f)}$ есть обертывающая алгебра для $\Pi^{(f)}(O)$. $\mathfrak{A}^{(f)}$ будет исследоваться ради нее самой, и лишь после того, как это будет выполнено, мы возвратимся с помощью указанного забытого факта к группе $O(n)$.

Заменяя $A_f$ всем рядом $(A_f, A_{f-1}, \ldots, A_0)$, мы приходим к рассмотрению алгебры матриц

$$\|b_{uv}\| \qquad (u,\ v = f,\ f-1,\ \ldots,\ 0),$$

где $b_{uv}$ есть линейная комбинация единиц, определенных сочетанием в пары $u$ символов $x$ и $v$ символов $y$, и где соответственным образом определено умножение такой единицы $e_{uv}$ на единицу $e'_{vw}$.

## В. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

### 6. Разложение с помощью операции свертывания тензоров

Объектом нашего изучения будет теперь тензорное пространство $\mathrm{P}_f$ под действием алгебры $\mathfrak{A}_f$ или, если предпочитать рассматривать все тензорные пространства $\mathrm{P}_v$ рангов $v \leqslant f$ одновременно, — суммарное пространство $\mathrm{P}^{(f)} = (\mathrm{P}_f, \mathrm{P}_{f-1}, \ldots, \mathrm{P}_0)$

под действием $\mathfrak{A}^{(f)}$. Раз только выполнено разложение на неприводимые инвариантные подпространства относительно этой алгебры, результаты раздела А показывают, что это будет вместе с тем и полное разложение на неприводимые подпространства относительно ортогональной группы. Упомянутый в конце предыдущего параграфа прием, позволяющий нам обойти алгебру $\omega_f^n$, состоит в следующей простой идее.

Исходя из любого тензора $F(i_1 i_2 \dots i_f)$ ранга $f$, мы можем образовать *след по первым двум аргументам*

$$F_{12}(i_3 \dots i_f) = \sum_{i=1}^{n} F(i i i_3 \dots i_f),$$

являющийся тензором ранга $f-2$. Этот процесс, обычно называемый в тензорном исчислении свертыванием (Verjüngung, contraction), инвариантен относительно алгебры $\mathfrak{A}^{(f)}$: если

$$A^{(f)} = (A_f, A_{f-1}, A_{f-2}, \dots, A_0)$$

— произвольный элемент из $\mathfrak{A}^{(f)}$ и $A_f$ переводит тензор $F$ ранга $f$ в $\bar{F}$, то $A_{f-2}$ переводит след $F_{12}$ тензора $F$ в след $\bar{F}_{12}$ тензора $\bar{F}$; чтобы убедиться в этом, следует лишь применить уравнение ($2.2_k$) при $v=f$. Тензор $F$ ранга $f$ имеет $\frac{f(f-1)}{2}$ следов $F_{\alpha\beta}$ ($\alpha<\beta$; $\alpha, \beta = 1, \dots, f$). Рассмотрим в $P_f$ *инвариантное подпространство* $P_f^0$ *тех тензоров, все следы которых равны нулю*. Разложение пространства $P_f$ на $P_f^0$ и дополнительное инвариантное подпространство доставляется следующей теоремой.

Теорема (V.6.A). *Каждый тензор $F(i_1 \dots i_f)$ может быть единственным образом разложен на два слагаемых, у первого из которых, $F^0$, все следы $=0$, второе же имеет вид*

$$\Phi(i_1 \dots i_f) = \delta(i_1 i_2) F^{12}(i_3 \dots i_f) + \dots \qquad \left(\frac{f(f-1)}{2} \text{ слагаемых}\right). \tag{6.1}$$

Пусть $P_f^\dagger$ — многообразие всех тензоров вида (6.1). Требование, чтобы тензор $F$ был перпендикулярен к $P_f^\dagger$,

$$(F, \Phi) = 0 \quad \text{для всех } \Phi \text{ из } P_f^\dagger,$$

очевидно, означает, что все $\frac{f(f-1)}{2}$ следов тензора $F$ равны нулю. Поэтому многообразие $P_f^0$ всех тензоров $F^0$ с нулевыми следами является подпространством, перпендикулярным к $P_f^\dagger$, и наше предложение является непосредственным следствием леммы (V.2.A). При этом мы предполагаем, что основное поле $k$ — *вещественное.*

Однако более внимательное рассмотрение показывает, что это доказательство проходит при любом поле характеристики 0, поскольку оно на деле не выходит за пределы поля $\varkappa$ рациональных чисел. Определим базис подпространства $P_f^\dagger$, приписывая одной из компонент одного из $\frac{f(f-1)}{2}$ тензоров $F^{12}, \ldots$ в (6.1) значение 1, а всем остальным — значение 0. Варьируя всевозможными способами наш выбор, мы получим $\frac{1}{2}f(f-1)\cdot n^{f-2}$ базисных $\Phi$. Располагая их в один ряд и отбрасывая те, которые линейно зависят от предшествующих, мы придем к базису $\Phi_1, \ldots, \Phi_M$ $M$-мерного подпространства $P_f^\dagger$, состоящему из линейно независимых тензоров, имеющих целые рациональные компоненты. Построение части

$$\Phi = x_1\Phi_1 + \ldots + x_M\Phi_M \tag{6.2}$$

заданного тензора $F$ требует тогда решения системы линейных уравнений $(F, \Phi_\alpha) = (\Phi, \Phi_\alpha)$, т. е.

$$(F, \Phi_\alpha) = \sum_\beta e_{\alpha\beta} x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, M), \tag{6.3}$$

где коэффициенты суть целые рациональные числа

$$e_{\alpha\beta} = (\Phi_\alpha, \Phi_\beta).$$

Для *рациональных* $x_\alpha$ квадратичная форма

$$\sum_{\alpha, \beta} e_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

будучи квадратом $(\Phi, \Phi)$ рационального тензора (6.2), $> 0$, если только не все $x_\alpha$ равны нулю. Следовательно, $\det(e_{\alpha\beta})$, который является целым рациональным числом, не равен нулю и *остается таковым в любом поле $k$ над $\varkappa$*. Тем самым разрешимость системы уравнений (6.3) (в $k$) обеспечена.

Разложение $P_f = P_f^0 + P_f^\dagger$ столь важно для нас потому, что $P_f^\dagger$, как и $P_f^0$, инвариантно относительно $\mathfrak{A}_f$. Согласно уравнению (2.2$_l$) с $v = f$ подстановка $A_f$ переводит

$$\delta(i_1 i_2) F^{12}(i_3 \ldots i_f) \text{ в } \delta(i_1 i_2) \bar{F}^{12}(i_3 \ldots i_f),$$

если $A_{f-2}$ переводит $F^{12}$ в $\bar{F}^{12}$.

Повторно применяя наш процесс к тензорам $F^{12}, \ldots$ ранга $f-2$ в (6.1), мы в конечном итоге расщепим произвольный тензор $F(i_1 \ldots i_f)$ на слагаемые вида

$$\delta(i_{\alpha_1} i_{\alpha_1'}) \ldots \delta(i_{\alpha_r} i_{\alpha_r'})\, \varphi(i_{\beta_1} \ldots i_{\beta_v}) \qquad (2r+v=f), \tag{6.4}$$

где тензор $\varphi(i_1 \ldots i_v)$ ранга $v$ принадлежит $\mathrm{P}_v^0$, т. е. все его следы $=0$. $\alpha_1\alpha_{1'} | \ldots | \alpha_r\alpha_{r'} | \beta_1 \ldots \beta_v$ есть любое разбиение ряда индексов $1, 2, \ldots, f$ на $r$ частей длины 2 и одну — длины $v$; порядок, в котором расставлены $r$ частей длины 2, и расположение отдельных членов внутри каждой части несущественны. $F$ разлагается на части

$$F = F^0 + F^1 + F^2 + \ldots, \tag{6.5}$$

каждая — определенной „валентности“ $v=f,\ f-2,\ f-4, \ldots$ Это разложение единственно; соответствующие подпространства $\mathrm{P}_f^0, \mathrm{P}_f^1, \mathrm{P}_f^2, \ldots$ пространства $\mathrm{P}_f$ линейно независимы. Действительно, теорема (V.6.A) устанавливает, что $F^0$ единственно. Далее, в разложении

$$F = G^{(1)} + \Phi^{(1)}; \quad G^{(1)} = F^0 + F^1, \quad \Phi^{(1)} = F^2 + \ldots$$

у $G^{(1)}$ все его „двойные следы“ типа

$$G_{12,34}(i_5 \ldots i_f) = \sum_{i,k} G(iikki_5 \ldots i_f)$$

равны нулю, тогда как $\Phi^{(1)}$ есть сумма членов типа

$$\delta(i_1 i_2)\, \delta(i_3 i_4)\, F^{12,34}(i_5 \ldots i_f).$$

С помощью рассуждения, аналогичного проведенному при доказательстве теоремы (V.6.A), мы убеждаемся, что это разложение, т. е. $G^{(1)}$, однозначно определено; и так далее. Однако расщепление $F^r$ на отдельные слагаемые (6.4) валентности $f-2r$ в значительной степени неоднозначно.

Итак, нам в некотором смысле удалось заменить тензорное пространство $\mathrm{P}_f$ пространствами $\mathrm{P}_v^0$ следа 0 с $v=f,\ f-2, \ldots$ Подстановки $A_v$ из нашей алгебры $\mathfrak{A}^{(f)}$ гораздо легче характеризовать в этих подпространствах $\mathrm{P}_v^0$. Заметим сперва, что каждая подстановка $s$: $F \longrightarrow sF$ переводит тензор $F$ с нулевыми следами в тензор того же типа; поэтому $s$ есть и подстановка в $\mathrm{P}_f^0$. $A_f$ есть бисимметричная подстановка в $\mathrm{P}_f^0$, т. е. перестановочная со всеми $f!$ подстановками $s$. Следующая теорема устанавливает полное обращение этого:

Теорема (V.6.B). *Заданная бисимметричная подстановка* $A^0$ *в* $\mathrm{P}_f^0$ *и заданный элемент*

$$A^{(f-1)} = (A_{f-1}, \ldots, A_0) \tag{6.6}$$

*алгебры* $\mathfrak{A}^{(f-1)}$ *однозначно определяют подстановку* $A_f$ *в* $\mathrm{P}_f$ *такую, что* $A_f$ *внутри* $\mathrm{P}_f^0$ *совпадает с* $A^0$ *и*

$$A^{(f)} = (A_f, A_{f-1}, \ldots, A_0) \tag{6.7}$$

*есть элемент из* $\mathfrak{A}^{(f)}$.

*Или: для каждого заданного ряда* $A_v^0$ *бисимметричных подстановок в* $\mathrm{P}_v^0$ $(v = f, f-1, \ldots, 0)$ *существует однозначно определенный элемент* (6.7) *алгебры* $\mathfrak{A}^{(f)}$ *такой, что* $A_v$ *внутри* $\mathrm{P}_v^0$ *совпадает с заданным* $A_v^0$.

Дело вкуса — предпочесть ли доказать эту теорему в первой формулировке посредством разложения, указанного в теореме (V.6.A), или доказать теорему сразу во второй формулировке, опираясь на более полное разложение (6.5). Выберем первый путь. Ясно, как построить искомое $A = A_f$. Каждый тензор $F$ ранга $f$ расщепляется на $F^0 + \Phi$ согласно теореме (V.6.A), и его образ $A(F)$ определяется как $\overline{F}^0 + \overline{\Phi}$, где $\overline{F}^0 = A^0(F^0)$, а

$$\overline{\Phi} = \delta(i_1 i_2)\overline{F}^{12}(i_3 \ldots i_f) + \ldots$$

получается из (6.1) путем применения заданного $A_{f-2}$ к отдельным членам $F^{12}, \ldots$:

$$\overline{F}^{12} = A_{f-2}(F^{12}), \ \ldots$$

Единственное, что нужно установить, это то, что $\Phi$ однозначно определяет $\overline{\Phi}$; для этого мы должны показать, что из $\Phi = 0$ следует $\overline{\Phi} = 0$.

Из теоремы (V.6.A) мы знаем, что тензор $\overline{\Phi}$ из $\mathrm{P}_f^\dagger$ равен нулю, если равны нулю все его (простые) следы $\overline{\Phi}_{\alpha\beta}$ $(\alpha < \beta)$. Поэтому мы попытаемся показать, что след $\overline{\Phi}_{12}$ получается с помощью $A_{f-2}$ из соответствующего следа $\Phi_{12}$ тензора $\Phi$. Образуя след по первым двум аргументам, надлежит различать в сумме (6.1) члены трех типов:

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & \delta(i_1 i_2)\overline{F}^{12}(i_3 \ldots i_f), & \\
\text{b)} & \delta(i_1 i_\alpha)\overline{F}^{1\alpha}(i_2 \ldots \underset{\alpha}{|} \ldots i_f) & \{\alpha \neq 1, 2\}, \\
\text{c)} & \delta(i_\alpha i_\beta)\overline{F}^{\alpha\beta}(i_1 \ldots \underset{\alpha}{|} \ldots \underset{\beta}{|} \ldots i_f) & \{\alpha \text{ и } \beta \neq 1, 2\}.
\end{array}
$$

(черта вида $\underset{\alpha}{|}$ означает, что аргумент $i_\alpha$ отсутствует). Случаи a) и b) тривиальны. След члена a) по первым двум аргументам равен $n\overline{F}^{12}(i_3, \ldots i_f)$, след члена b) равен $\overline{F}^{1\alpha}(i_\alpha i_3 \ldots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \ldots i_f)$, и так как $A_{f-2}$ бисимметрично, то расстановка аргументов в порядке

$$i_3 \ldots i_{\alpha-1} i_\alpha i_{\alpha+1} \ldots i_f$$

не окажет влияния на результат подстановки.

След члена c) по аргументам $i_1, i_2$ есть

$$\delta(i_\alpha i_\beta)\,\overline{F}^{\alpha 3}_{12}(i_3 \ldots \underset{\alpha}{|} \ldots \underset{\beta}{|} \ldots i_f). \tag{6.8}$$

Согласно уравнению $(2.2_l)$ с $v = f - 2$, след $\overline{F}^{\alpha\beta}_{12}$ тензора $\overline{F}^{\alpha 3}$ получается из $F^{\alpha\beta}_{12}$ посредством подстановки $A_{f-4}$; поэтому, согласно уравнению $(2.2_k)$ с $v = f - 2$, тензор (6.8) получается из соответствующего тензора без черточки посредством $A_{f-2}$, что мы и утверждали.

По нашему построению след тензора $\Phi$ переводится подстановкой $A_{f-2}$ в след тензора $\overline{\Phi}$, и так как следы тензоров $F^0$ и $\overline{F}^0 = A^0(F^0)$ равны нулю, то след любого тензора $F$ переходит в след его образа $\overline{F} = A(F)$ посредством подстановки $A_{f-2}$. Поэтому построенная нами подстановка $A_f$ обладает следующими свойствами: она

1) бисимметрична;

2) совпадает с $A^0$ в пределах $\mathrm{P}_f^0$;

3) преобразует следы тензоров ранга $f$ согласно заданной подстановке $A_{f-2}$;

4) превращает тензор $\delta(i_1 i_2) F^{12}(i_3 \ldots i_f)$ в $\delta(i_1 i_2) \overline{F}^{12}(i_3 \ldots i_f)$, где $\overline{F}^{12}$ получается из $F^{12}$ посредством $A_{f-2}$.

Это нам и требовалось доказать. В то время как в случае полной линейной группы совместное рассмотрение пространства $\mathrm{P}_f$ с тензорными пространствами низшего ранга было, быть может, ненужным усложнением, здесь мы абсолютно ничего не добились бы, не объединив с $f$ ранги $f-2$, $f-4$, ...

## 7. Неприводимые представления полной ортогональной группы

Наша общая теория раздела B главы III в применении к встретившемуся нам здесь случаю, когда $\gamma$ есть симметрическая группа $\pi_f$, векторное пространство есть пространство $\mathrm{P}_f^0$

всех тензоров ранга $f$ с нулевыми следами, а заданное представление группы $\gamma$ в $P_f^0$ есть $F \to sF$, показывает нам, как расщепить $P_f^0$ на неприводимые инвариантные подпространства относительно алгебры $\mathfrak{A}_f^0$ бисимметричных подстановок в $P_f^0$. Инвариантное подпространство

$$P_0(T) = P_0(f_1 f_2 \ldots),$$

соответствующее диаграмме $T$, строки которой имеют, соответственно, длины $f_1, f_2, \ldots$ $(f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots)$, состоит из тензоров $cF$, где $c$ есть симметризатор Юнга диаграммы $T$, а $F$ пробегает все тензоры ранга $f = f_1 + f_2 + \ldots$ с нулевыми следами. Положение дела, вплоть даже до кратности, с которой входит каждая неприводимая составляющая, будет здесь совершенно выяснено, коль скоро мы будем знать, какая часть группового кольца $\mathfrak{r}$ симметрической группы играет здесь роль $\rho_0$. $\rho_0$ определяется как линейная оболочка всех величин $F(\cdot;\ i_1 \ldots i_f)$ с коэффициентами

$$F(s;\ i_1 \ldots i_f) = sF(i_1 \ldots i_f),$$

получаемыми, когда $i_1, \ldots, i_f$ независимо друг от друга пробегают значения от 1 до $n$, а $F$ пробегает все *тензоры с нулевыми следами*. Это $\rho_0$ более узко, чем $\rho_0$ предыдущей главы, где $F$ пробегало *все* тензоры вообще, и потому впредь будет обозначаться через $\rho_{00}$. Неприводимое инвариантное подпространство в $P_f^0$ состоит из всех тензоров вида $eF$, где $e$ есть примитивный идемпотент в групповом кольце группы $\pi_f$, а $F$ пробегает $P_f^0$. В частности, мы можем выбрать в качестве $e$ симметризатор Юнга, соответствующий диаграмме $T$, т. е. данному разбиению $f$ на слагаемые. Из этой связи ясно, что если сначала оперировать в рациональном основном поле $\varkappa$ и определить неприводимые части над $\varkappa$, то эти части будут неприводимыми над любым полем $k$ над $\varkappa$. Мы будем знать $\rho_{00}$, если будем знать, какие симметризаторы Юнга $c$ переводят каждый тензор с нулевыми следами в нуль: $cF = 0$ для всех $F$ из $P_f^0$.

Теорема (V.7.A). *$P_0(T)$ пусто, если только сумма длин первых двух столбцов схемы симметрии $T$ не $\leqslant n$.*

Это предложение непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма (V.7.B). *Тензор*

$$F\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_a \\ k_1 \ldots k_b \end{pmatrix},$$

*косо-симметричный относительно аргументов каждой строки, лежит в* $P^{\dagger}_{a+b}$, *если* $a+b$ *превосходит* $n$, *и потому равен нулю, если равны нулю его следы.*

Полилинейную форму вида

$$\sum_{i,k} F\begin{pmatrix} i_1 \dots i_a \\ k_1 \dots k_b \end{pmatrix} \xi^{(1)}_{i_1} \dots \xi^{(a)}_{i_a} \eta^{(1)}_{k_1} \dots \eta^{(b)}_{k_b},$$

косо-симметричную относительно $a$ векторов $\xi^{(\alpha)}$, равно как и $b$ векторов $\eta^{(\beta)}$, можно символически представить в виде

$$[\xi^{(1)} \dots \xi^{(n)}]\,[\eta^{(1)} \dots \eta^{(n)}] \tag{7.1}$$

с помощью $n-a$ символических векторов $\xi^{(a+1)}, \dots, \xi^{(n)}$ и $n-b$ символических векторов $\eta^{(b+1)}, \dots, \eta^{(n)}$. (7.1) есть определитель скалярных произведений

$$(\xi^{(\alpha)}\eta^{(\beta)}) \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \dots, n).$$

Каждый член этого определителя есть произведение $n$ множителей $(\xi\eta)$, и так как число символических векторов

$$\xi^{(a+1)}, \dots, \xi^{(n)}; \quad \eta^{(b+1)}, \dots, \eta^{(n)}$$

меньше $n$, то каждый член содержит по меньшей мере один несимволический множитель

$$(\xi^{(\alpha)}\eta^{(\beta)}) \quad (\alpha = 1, \dots, a;\ \beta = 1, \dots, b).$$

Поэтому $F\begin{pmatrix} i_1 \dots i_a \\ k_1 \dots k_b \end{pmatrix}$ есть сумма $ab$ членов, каждый из которых содержит множители вида $\delta(i_\alpha k_\beta)$, что и требовалось доказать.

Это доказательство, очевидно, пригодно и для установления справедливости более сильного утверждения, а именно, что $F$ лежит в пространстве, обозначенном нами через $P^{a+b-n}_{a+b}$. *Поэтому для обращения тензора* $F$ *в нуль достаточно обращения в нуль уже его* $(a+b-n)$*-кратных следов.* Того же результата можно было бы достичь и путем непосредственных комбинаторных рассмотрений.

Диаграммы, у которых совокупная длина первых двух столбцов $\leqslant n$, мы будем называть допустимыми диаграммами. Непосредственно ясно, что их можно распределить на пары „ассоциированных“ диаграмм $T$, $T'$ так, что длиной первого столбца в $T$ служит число $m \leqslant \frac{1}{2}n$, а в $T'$ — число $n-m$, длины же остальных столбцов в $T$ и $T'$ одинаковы. Диаграмма $T$ самоассоциирована, $T=T'$, если $m$ точно $=\frac{1}{2}n$, что может произойти лишь в случае четной размерности. Поэтому удобно различать нечетные и четные размерности: $n=2\nu+1$ или $n=2\nu$. Диаграмму $T$, содержащую $m\leqslant\frac{1}{2}n$ строк, можно считать содержащей точно $\nu$ строк длин $f_1, \ldots, f_\nu$,

$$f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0, \qquad f_1+\ldots+f_\nu=f, \tag{7.2}$$

допуская для некоторых $f_i$ нулевое значение. Мы будем пользоваться обозначением

$$\mathrm{P}_0(T)=\mathrm{P}_0(f_1\ldots f_\nu), \qquad \mathrm{P}_0(T')=\mathrm{P}_0'(f_1\ldots f_\nu).$$

$T$ состоит из $f$ полей, а $T'$ — из большего их числа, если только $T$ — не самоассоциирована. Когда $f_1, \ldots, f_\nu$ пробегают все целые числа, удовлетворяющие условиям (7.2), а $f$ принимает значения 0, 1, 2, ..., ассоциированные диаграммы

$$T=T(f_1\ldots f_\nu) \quad \text{и} \quad T'$$

исчерпывают все допустимые диаграммы. В случае нечетной размерности каждая такая диаграмма получается точно один раз, в случае же четной размерности $T$ и $T'$ совпадают, и потому

$$\mathrm{P}_0'(f_1\ldots f_\nu)=\mathrm{P}_0(f_1\ldots f_\nu),$$

когда $T$ фактически содержит $\nu$ строк: $f_\nu>0$.

Обращение теоремы (V.7.A) тоже верно:

**Теорема** (V.7.C). *Если $T$ — допустимая диаграмма, то $\mathrm{P}_0(T)$ не пусто.*

Пусть $T$ содержит $m\leqslant\nu$ строк; обозначим индексы $1, 2, \ldots, n$ через $1, 1^*, \ldots, m, m^*, m+1, \ldots, n-m$. Определим тензор $G_0(i_T)$ от таблицы аргументов

$$i_T=\left(\begin{array}{l} i_{11}\ldots\ldots i_{1f_1} \\ \cdot\ \cdot\cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_{m1}\ldots \end{array}\right)$$

следующим образом. Компонента $G_0(i_T)$ равна нулю, за исключением того случая, когда a) все аргументы в первой строке диаграммы $T$ равны 1 или $1^*$, во второй строке — равны 2 или $2^*$, ..., в $m$-й строке — равны $m$ или $m^*$, и b) число аргументов, принимающих значения, помеченные звездочкой, четно; для аргументов же, удовлетворяющих этим двум условиям, $G_0$ принимает значение

$$(7.3)\qquad (-1)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Этот тензор $G_0(i_T)$ симметричен относительно аргументов каждой строки, и следы его, очевидно, равны нулю. Аналогичный тензор $G^0$ получим, заменяя (7.3) на $(-1)^{\frac{\mu-2}{2}}$ и одновременно требуя, чтобы число $\mu$ было *нечетным*. Альтернирование относительно столбцов переводит $G_0$ (и $G^0$) в ненулевой тензор $F_0$ (и $F^0$) требуемого рода. Словесное описание простой картины, представляемой этим тензором $F_0$, становится уже довольно громоздким. Компоненты $F_0(i_T)$ равны нулю, если только значения в первом столбце диаграммы $T$ не получаются из $1, \ldots, m$ путем перестановки этих индексов и снабжения некоторых из них звездочкой и аналогично для остальных столбцов, причем число $\mu$ аргументов, принимающих значения со звездочкой, должно быть четным. „Старшая“ компонента

$$F_0\begin{pmatrix} 1\ 1 \ldots\ldots 1 \\ 2\ 2 \ldots\ldots 2 \\ \ldots\ldots \\ m \ldots m \end{pmatrix} \quad \text{равна } 1,$$

каждая же транспозиция двух аргументов в одном и том же столбце, равно как и одновременное снабжение двух аргументов звездочками, изменяет значение $F_0$ на $-F_0$.

Чтобы достичь того же для ассоциированной схемы $T'$, мы вместо $G_0(i_T)$ пользуемся тензором

$$G_0(i_{T'}) = G_0(i_T \mid i_{m+1} \ldots i_{n-m}) = G_0(i_T)\cdot\varphi(i_{m+1} \ldots i_{n-m}),$$

где

$$\varphi(i_{m+1} \ldots i_{n-m}) = \pm 1,$$

если $i_{m+1}, \ldots, i_{n-m}$ является, соответственно, четной или нечетной перестановкой чисел $m+1, \ldots, n$, и $\varphi = 0$ в противном случае.

Позже мы будет иметь случай применить следующую операцию: для заданного косо-симметричного тензора $F(i_1 \ldots i_\rho)$ ранга $\rho \leqslant n$ мы определяем „дополнительный“ косо-симметричный тензор $\sigma F$ ранга $n-\rho$ равенством

$$(7.4)\qquad F(i_1 \ldots i_\rho) = \sigma F(i_{\rho+1} \ldots i_n),$$

имеющим место для всякой четной перестановки $i_1, \ldots, i_\rho$, $i_{\rho+1}, \ldots, i_n$ индексов $1, \ldots, n$. (Мы на время оставляем в стороне вопрос о том, является ли эта операция ортогонально инвариантной.) Если мы применим описанную операцию к аргументам первого столбца тензора $F(i_{T'})$, косо-симметричного относительно аргументов каждого столбца диаграммы $T'$, то получим тензор $\sigma F(i_T)$, косо-симметричный относительно аргументов каждого столбца диаграммы $T$:

$$F\left(\begin{array}{l} i_1\, i_{12}\ \cdots i_{1f_1} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ i_m\, i_{m2} \cdots \\ i_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{n-m} \end{array}\right) = \sigma F\left(\begin{array}{l} i_1^*\, i_{12}\ \cdots i_{1f_1} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ i_m^*\, i_{m2} \cdots \end{array}\right) \tag{7.5}$$

$\{i_1, \ldots, i_{n-m}, i_1^*, \ldots, i_m^*$ — любая четная перестановка чисел $1, \ldots, n\}$.

В частности, наш тензор $F_0(i_{T'})$ переводится этой операцией либо в $\pm F_0(i_T)$, либо в $\pm F^0(i_T)$, сообразно четности или нечетности числа $m$, — замечание, которое следует запомнить для дальнейших целей.

Тем же способом, каким теорема (IV.4.C) следует из леммы (IV.4.B), из теорем (V.7.A) и (V.7.C) вытекает теперь:

Теорема (V.7.D). *Сумма*

$$e = i + i' + \ldots,$$

*распространенная на все допустимые диаграммы симметрии, является единицей* 1 *в* $\rho_{00}$.

Применение нашей общей теории увенчивает теперь следующая

Теорема (V.7.E). $P_f^0$ *под действием* $\mathfrak{O}_f^0$ *расщепляется на неприводимые инвариантные подпространства* $P_0(T)$, *определяемые, каждое, некоторой допустимой диаграммой симметрии* $T$ (и соответствующим ей симметризатором $c$). *Различные диаграммы порождают неэквивалентные подпространства. В этом разложении диаграмма* $T$ *появляется* $g$ *раз, где* $g$ — *число, определенное в предыдущей главе формулой* (IV.4.5).

*Частичные пространства взяты над $\varkappa$, но остаются неприводимыми над любым полем $k$ над $\varkappa$.*

Обращаясь к *полному тензорному пространству*, мы сперва расщепляем $P_f$ на частичные пространства $P_f^0, P_f^1, \ldots$ валентностей $f, f-2, \ldots$, равенство (6.5). Общий тензор валентности $v$ есть сумма членов (6.4), в которых $\varphi$ имеет областью значений все пространство $P_v^0$. Это пространство разлагается на неприводимые инвариантные части относительно алгебры всех бисимметричных подстановок в $P_v^0$. Каждая отдельная часть состоит из всех тензоров вида $e\phi$, где $e$ — примитивный идемпотентный оператор симметрии с $v$ индексами, а $\phi$ пробегает все $P_v^0$. Вместо

$$(7.6) \qquad a_1, a_{1'} | \ldots | a_r, a_{r'} | \beta_1 \ldots \beta_v$$

мы подставляем все существенно различные расстановки ряда $1, 2, \ldots, f$. Таким образом $P_f^r$ оказывается суммой некоторого числа неприводимых инвариантных подпространств относительно нашей алгебры $\mathfrak{A}_f$, которые мы, расположив в каком-нибудь порядке, обозначим через $\Sigma_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$). Применяя часто употреблявшуюся лемму (III.2.B), мы отбросим те из них, которые излишни, и получим таким образом действительное разложение $P_f$ на независимые неприводимые инвариантные подпространства относительно нашей алгебры $\mathfrak{A}_f$.

Теорема (V.7.F). *$P_f$ разложимо на неприводимые инвариантные подпространства относительно алгебры $\mathfrak{A}_f$. Каждая отдельная часть содержит все тензоры вида* (6.4), *где $\varphi$ пробегает одно из неприводимых подпространств $P_0(T) = P_0(f_1 f_2 \ldots)$ пространства $P_v^0$; $T$ — любая допустимая диаграмма с $v = f_1 + f_2 + \ldots$ полями, а $v$ принимает значения $f, f-2, \ldots$ Неприводимые части над $\varkappa$ остаются неприводимыми над любым полем $k$ над $\varkappa$.*

Теорема (V.7.G). *Каждое инвариантное подпространство пространства $P_f$ разбивается на неприводимые инвариантные части, любая из которых подобна одному из пространств $P_0$ $(f_1 f_2 \ldots)$, упомянутых в предыдущей теореме.*

*Более обще: каждое представление алгебры $\mathfrak{A}^{(f)}$ вполне приводимо, и в случае неприводимости эквивалентно представлению $\langle P_0(T)\rangle = \langle P_0(f_1 f_2 \ldots)\rangle$, порождаемому некоторой допустимой диаграммой $T$ с $f_1 + f_2 + \ldots = v \leqslant f$ полями.*

То обстоятельство, что части (6.4) тонзора $F^r$, соответствующие всевозможным расстановкам (7.6), не являются линейно независимыми, не позволяет нам предсказать, сколько эквивалентных неприводимых составляющих каждого сорта $\langle P_0(f_1 f_2 \ldots)\rangle$ появится в разложении пространства $P_f$. Утверждение, подобное приведенному в теореме (V.7.E), еще сохраняет силу для валентности $v = f$, однако уже не верно для низших валентностей $f - 2, \ldots$ В этом отношении наш результат менее полон, чем для всей линейной группы. Могло бы притти на ум начать с разложения $P_f$ относительно полной алгебры $\mathfrak{K}_f$ бисимметричных подстановок, прежде чем расщеплять его на более мелкие части соответственно нашей более узкой алгебре $\mathfrak{A}_f$. Из (6.5) получаем

$$cF = cF^0 + cF^1 + \ldots,$$

где слагаемые в правой части лежат в $P_f^0, P_f^1, \ldots$ Для $c$, соответствующего допустимой диаграмме, это равенство показывает, что „грубая" часть, состоящая из всех тензоров $cF$, содержит более „тонкую" часть из всех тензоров $cF^0$ ($F^0 \in P_f^0$) точно один раз. Это объясняет, почему диаграммы валентности $f$ встречаются здесь столь же часто, как и в грубом разложении относительно полной алгебры $\mathfrak{K}_f$, *коль скоро они вообще встречаются.*

Теория разложения, развитая в разделе B этой главы, не зависит от результата раздела A, устанавливающего, что $\mathfrak{A}_f$ есть обертывающая алгебра группы $\Pi_f(O)$. Используя теперь этот последний факт, мы заключаем[5]:

Теорема (V.7.H). *Представление $\langle P_0(T)\rangle$ ортогональной группы неприводимо для каждой допустимой диаграммы $T$. Различные диаграммы, независимо от того, содержат ли они одинаковое или различное число полей, приводят к неэквивалентным представлениям.*

*Теоремы* (V.7.F) *и* (V.7.G) *остаются в силе при замене алгебры $\mathfrak{A}_f$ группой $\Pi_f(O)$.*

Относительно двух диаграмм с различным числом полей, $f$ и $v < f$, следует снова заметить, что обертывающая алгебра $\mathfrak{A}^{(f)}$ содержит элемент, являющийся тождественным преобразованием в $P_f^0$ и нулевым преобразованием в $P_v^0$. Последнее утверждение теоремы (V.7.G) относится теперь к представлению $R(A)$ группы $O(n)$, в котором компоненты представляющей матрицы $R(A)$ суть полиномы от компонент $a(ik)$ матрицы $A$, имеющие формальную степень $f$.

Таким образом, мы в итоге вернулись к утверждению, с которого началось все наше исследование в этой главе, а именно, что группа $\Pi_f(O)$ вполне приводима. Однако теперь мы в состоянии явно описать ее разложение и дополнительно узнали, что части, неприводимые над $\varkappa$, *абсолютно* неприводимы.

Кронекеровское произведение двух построенных нами здесь величин типов $\langle P_0(f_1 f_2 \ldots)\rangle$ расщепляется на некоторое число независимых примитивных величин, каждая из которых снова описывается как величина некоего типа $\langle P_0(f_1 f_2 \ldots)\rangle$. Поскольку в случае ортогональной группы не существует разницы между ковариантными и контравариантными векторами, представление $\langle P_0(f_1 f_2 \ldots)\rangle$ контрагредиентно самому себе. Таким образом, мы имеем здесь те же самые свойства замкнутости, с которыми мы встретились в § 5 главы IV для величин полной линейной группы.

Окольный путь, которым мы доказали полную приводимость алгебры $\mathfrak{A}_f$, изображается диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\pi_v \arrow[r] & \mathfrak{A}^0_v \arrow[d] \\
\omega^n_f & \mathfrak{A}_f \arrow[l]
\end{tikzcd} \qquad (v = f, f-2, \ldots)$$

где стрелку, ведущую к $\omega^n_f$, мы сперва не будем принимать во внимание. Но, применяя к $\mathfrak{A}_f$ ту же общую теорему (III.5.B), с помощью которой мы смогли установить связь, изображаемую верхней горизонтальной стрелкой, можно было бы показать, что коммутаторная алгебра алгебры $\mathfrak{A}_f$, т. е. $\omega^n_f$ *в ее конкретной форме*, вполне приводима. Так как эта конкретная форма является в случае $n \geqslant 2f$ точным представлением, то мы заключаем из теоремы (III.5.C), что абстрактная алгебра $\omega^n_f$, или, лучше, ее регулярное представление, при $n \geqslant 2f$ вполне приводимо над рациональным полем $\varkappa$ и что части, неприводимые над $\varkappa$, абсолютно неприводимы. Мне представляется весьма сомнительным, чтобы величина числа $n$ могла влиять на строение алгебры $\omega^n_f$ в такой степени, что наш результат терял бы силу при $n < 2f$, однако вопрос приходится оставить открытым. Поскольку это касается полного приведения, теорема (III.5.B) позволяет нам свободно перескакивать от матричной алгебры к ее коммутаторной алгебре, как указано горизонтальными стрелками; если бы можно было выполнить вертикальный переход непосредственно на левой стороне, не перепрыгивая туда и обратно через канаву, мы, вероятно, были бы в состоянии разрешить наш вопрос. При настоящем же положении вещей я не могу дать читателю возможности расстаться с этой темой без осадка неудовлетворенности.

## С. СОБСТВЕННО ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА

### 8. Теорема Клиффорда

От полной ортогональной группы мы обращаемся теперь к группе $O^{+}(n)$ всех собственно ортогональных преобразований в $n$-мерном пространстве. Переход к этой подгруппе индекса 2 выполняется значительно легче на группах, чем на обертывающих алгебрах, благодаря следующей красивой общей теореме, найденной А. Клиффордом в этом контексте [6].

Теорема (V.8.A). *Пусть заданы группа $\gamma = \{s\}$ и ее неприводимое представление $\mathfrak{A}(\gamma)$: $s \to A(s)$ над числовым полем $k$. Пусть, далее, $\gamma' = \{t\}$ — заданная инвариантная подгруппа группы $\gamma$. Тогда ее представление*

$$\mathfrak{A}(\gamma'):\quad t \to A(t)$$

*разбивается на „сопряженные“ неприводимые представления одинаковых степеней. Если индекс $\gamma/\gamma'$ конечен, то число неприводимых компонент не может превзойти его.*

Смысл прилагательного „сопряженные“ будет разъяснен в процессе доказательства. Пусть $\mathfrak{x}$ — вектор $n$-мерного пространства P, в котором действует представление $\mathfrak{A}(\gamma)$; через $\mathfrak{x}' = s\mathfrak{x}$ мы будем обозначать образ $\mathfrak{x}' = A(s)\mathfrak{x}$ вектора $\mathfrak{x}$. Буква $s$, с индексами или без, всегда будет обозначать элемент из $\gamma$, а $t$ — элемент из $\gamma'$. Мы выбираем $l$-мерное подпространство $\Lambda$ пространства P, неприводимо инвариантное относительно $\gamma'$ и как таковое являющееся носителем некоторого неприводимого представления $t \to B(t)$ подгруппы $\gamma'$, имеющего степень $l$. Буква $\mathfrak{x}$ впредь будет использоваться лишь для векторов из $\Lambda$. При фиксированном элементе $s$ из $\gamma$ и $\mathfrak{x}$, пробегающем $\Lambda$, $s\mathfrak{x}$ пробегает подпространство $s\Lambda$, также инвариантное относительно $\gamma'$, как это видно из равенства

$$t(s\mathfrak{x}) = s(t'\mathfrak{x}) = s\mathfrak{x}'.$$

Здесь $s^{-1}ts = t'$, и мы пользуемся тем обстоятельством, что $\gamma'$ есть инвариантная подгруппа группы $\gamma$. $s\Lambda$ есть носитель *сопряженного* представления:

$$t \to B(s^{-1}ts).$$

Для любого подпространства $\Lambda^*$, инвариантного относительно $\gamma'$, те векторы $\mathfrak{x}$ из $\Lambda$, для которых $s\mathfrak{x}$ принадлежит $\Lambda^*$, образуют в $\Lambda$ подпространство $\Lambda_0$, инвариантное в том же смысле:

$$\text{если} \quad s\mathfrak{x} \in \Lambda^*, \quad \text{то} \quad s(t\mathfrak{x}) = t''(s\mathfrak{x}) \in \Lambda^*.$$

Поскольку $\Lambda$ неприводимо, имеются лишь две возможности: $\Lambda_0 = 0$ или $\Lambda$; $s\Lambda$ либо линейно независимо от $\Lambda^*$, либо содержится в $\Lambda^*$.

В случае конечного индекса $j$, пусть

$$s_1\gamma' = \gamma', \quad s_2\gamma', \quad \ldots, \quad s_j\gamma'$$

будут смежные классы в $\gamma$ по $\gamma'$. Применяя к последовательности подпространств

$$(8.1) \qquad s_1\Lambda, \quad s_2\Lambda, \ldots, s_j\Lambda,$$

инвариантных относительно $\gamma'$, рассуждение леммы (III.2.B), мы выделим из них некоторое число,

$$s_1\Lambda, \ldots, s_e\Lambda,$$

линейно независимых, сумма которых

$$s_1\Lambda + \ldots + s_e\Lambda$$

содержит все пространства (8.1). Так как эта сумма инвариантна тогда относительно всей группы $\gamma$, она должна совпадать со всем пространством $P$, и тем самым представление $\mathfrak{A}(\gamma')$ разложено на $e$ сопряженных неприводимых представлений

$$t \rightarrow B(s_i^{-1}ts_i) \qquad (i = 1, \ldots, e).$$

При этом $e$ является делителем $n$, $n = el$, и $\leqslant j$.

Не предполагая конечности индекса, рассуждаем следующим образом. Если $s_1\Lambda = \Lambda$ — еще не все пространство, то существует элемент $s = s_2$ такой, что $s\Lambda$ не содержится в $\Lambda$; в противном случае $\Lambda$ было бы инвариантно относительно всех элементов $s$ группы $\gamma$. Как мы доказали, $s_2\Lambda$ тогда необходимо линейно независимо от $\Lambda$. Если и сумма $s_1\Lambda + s_2\Lambda$ не исчерпывает всего $P$, то существует $s = s_3$ такое, что $s\Lambda$ не содержится в $s_1\Lambda + s_2\Lambda$; тогда $s_3\Lambda$ линейно независимо от этой суммы. И так далее. Этот процесс должен остановиться после $\frac{n}{l}$ шагов.

Применим эту теорему, в частности, к подгруппе $\gamma'$ *индекса* 2:

$$\gamma = \gamma' + u\gamma'.$$

Тогда заданное неприводимое представление

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\gamma): \quad s \longrightarrow A(s)$$

либо остается неприводимым и при ограничении подгруппой $\gamma'$ (первый тип), либо же разбивается на две неприводимые части $\mathfrak{A}_1(\gamma')$, $\mathfrak{A}_2(\gamma')$, сопряженные и одинаковых степеней (второй тип):

$$(8.2) \qquad A(t) = \begin{Vmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{Vmatrix}.$$

Во втором случае, когда $P$ разлагается в сумму $\Lambda + u\Lambda$, подстановка $u$ переводит подпространство $\Lambda$ в $u\Lambda$ и обратно ($u^2 = c$ есть элемент из $\gamma'$). Это означает, что $u$ представляется в $\mathfrak{A}$ матрицей вида

$$(8.3) \qquad A(u) = \begin{Vmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Систему координат в $u\Lambda$ можно нормировать по системе координат в $\Lambda$ так, чтобы $C_2$ стало единичной матрицей $E$; тогда

$$A_2(t) = A_1(t'), \qquad t' = u^{-1}tu.$$

Элементу $u^2 = c$ отвечают в $\mathfrak{A}_1(\gamma')$, $\mathfrak{A}_2(\gamma')$ соответственно матрицы $C_1C_2$ и $C_2C_1$.

Соотношения

$$s \longrightarrow A(s) \quad \text{или} \quad s \longrightarrow -A(s),$$

соответственно тому, лежит ли $s$ в $\gamma'$ или же в смежном классе $u\gamma'$, определяют новое неприводимое представление $\mathfrak{A}'(\gamma)$ группы $\gamma$; мы назовем его *ассоциированным* с заданным представлением $\mathfrak{A}(\gamma)$. Разложение

$$\mathfrak{A}(\gamma') = \mathfrak{A}_1(\gamma') + \mathfrak{A}_2(\gamma')$$

может иметь место лишь, если ассоциированное представление $\mathfrak{A}'(\gamma)$ эквивалентно $\mathfrak{A}(\gamma)$. Действительно, для ассоциированного представления мы имеем, в параллель к (8.2), (8.3),

$$t \longrightarrow \begin{Vmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{Vmatrix}, \quad u \longrightarrow \begin{Vmatrix} 0 & -C_1 \\ -C_2 & 0 \end{Vmatrix},$$

что превращается в (8.2), (8.3) при перемене знаков координат во втором подпространстве. Суммируем:

Теорема (V.8.B). *При ограничении подгруппой индекса 2 заданное неприводимое представление либо остается непри-*

***водимым, либо разбивается на две неприводимые сопряженные части одинаковых степеней; последнее возможно лишь, если заданное представление эквивалентно ассоциированному с ним.***

Вопрос об *эквивалентности*, повидимому, допускает простой и общий ответ лишь в случае *абсолютной* неприводимости. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема (V.8.C). *Два абсолютно неприводимых представления $\mathfrak{A}(\gamma)$, $\mathfrak{B}(\gamma)$ первого типа приводят к неэквивалентным представлениям $\mathfrak{A}(\gamma')$, $\mathfrak{B}(\gamma')$ подгруппы $\gamma'$ индекса 2, если $\mathfrak{B}(\gamma)$ не эквивалентно ни $\mathfrak{A}(\gamma)$, ни ассоциированному $\mathfrak{A}'(\gamma)$.*

*Части $\mathfrak{A}_1(\gamma')$, $\mathfrak{A}_2(\gamma')$ абсолютно неприводимого $\mathfrak{A}(\gamma)$ второго типа неэквивалентны.*

Если бы $\mathfrak{A}(\gamma')$ и $\mathfrak{B}(\gamma')$ в первой части теоремы были эквивалентны, то мы могли бы считать, что матрицы $A(t)$ и $B(t)$ в

$$\mathfrak{A}\colon\ s \longrightarrow A(s) \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}\colon\ s \longrightarrow B(s)$$

совпадают для элементов $t$ из $\gamma'$. Матрицы $U$ и $V$, отвечающие $u$ соответственно в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, должны удовлетворять соотношениям

$$U^{-1}A(t)\,U = A(t'), \qquad U^2 = A(c)$$

и

$$V^{-1}A(t)\,V = A(t'), \qquad V^2 = A(c)$$

с

$$t' = u^{-1}tu, \qquad u^2 = c. \tag{8.4}$$

Согласно лемме Шура, применимой к абсолютно приводимым множествам матриц, как $\{A(t)\}$, первое уравнение определяет $U$ с точностью до численного множителя; поэтому $V = \beta U$. Второе уравнение дает тогда $\beta^2 = 1$: $V = U$ или $-U$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ должно совпадать либо с $\mathfrak{A}$, либо с ассоциированным $\mathfrak{A}'$.

Для доказательства второй части теоремы примем, что, вопреки ее утверждению, $\mathfrak{A}_2(\gamma')$ совпадает с $\mathfrak{A}_1(\gamma')$:

$$A(t) = \begin{Vmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{Vmatrix}. \tag{8.5}$$

Первое из равенств (8.4) дает тогда:

$$\begin{Vmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_1(t) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_1(t') & 0 \\ 0 & A_1(t') \end{Vmatrix}$$

или

$$A_1(t') = C_1^{-1} A_1(t) C_1, \qquad A_1(t') = C_2^{-1} A_1(t) C_2.$$

Это приводит к соотношению $C_2 = \mu C_1$ или, по умножении координат во втором подпространстве на число $\mu$, — к равенству $C_2 = C_1 = C$, не нарушая нормальной формы (8.5). Если обозначить координаты в рассматриваемых двух подпространствах через

$$x_i, \; y_i \qquad (i = 1, \ldots, \nu; \; 2\nu = n),$$

то $\mathfrak{A}$ представляет

$$t \text{ посредством } \begin{cases} x' = A_1 x, \\ y' = A_1 y, \end{cases} \qquad \text{а } u \text{ посредством } \begin{cases} x' = Cy, \\ y' = Cx. \end{cases}$$

Поэтому все векторное пространство разбивается на два $\nu$-мерных подпространства с координатами, соответственно, $x_i + y_i$ и $x_i - y_i$, инвариантных относительно полной группы $\gamma$:

$$t \longrightarrow A_1(t), \qquad u \longrightarrow C$$

в первом и

$$t \longrightarrow A_1(t), \qquad u \longrightarrow -C$$

во втором подпространстве. Тем самым мы пришли в противоречие с предположенной неприводимостью представления $\mathfrak{A}(\gamma)$.

Присоединим к утверждениям, содержащимся в теореме (V.8.C), следующие, более тривиальные.

Теорема (V.8.D). *В предположении абсолютной неприводимости, представление* $\mathfrak{A}(\gamma')$, *порождаемое представлением* $\mathfrak{A}(\gamma)$ *первого типа, не может быть эквивалентно ни одной из двух частей* $\mathfrak{B}_1(\gamma')$, $\mathfrak{B}_2(\gamma')$, *порождаемых представлением* $\mathfrak{B}(\gamma)$ *второго типа.*

*Если* $\mathfrak{A}(\gamma)$, $\mathfrak{B}(\gamma)$ — *два неэквивалентных неприводимых представления второго типа, то* $\mathfrak{A}_\alpha(\gamma')$ *не эквивалентно* $\mathfrak{B}_\beta(\gamma')$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$.

Доказательство. То обстоятельство, что $\mathfrak{B}_2(\gamma')$ не эквивалентно $\mathfrak{B}_1(\gamma')$, влечет за собой невозможность расширения представления $t \longrightarrow B_1(t)$ подгруппы $\gamma'$ посредством подходящего соответствия $u \longrightarrow C$ до представления всей группы $\gamma$. Представление же $\mathfrak{A}(\gamma')$ первого типа допускает расширение согласно его происхождению из $\mathfrak{A}(\gamma)$.

В случае представлений второго типа мы можем принять, что

$$A_2(t) = A_1(t') \text{ и } u \to \begin{Vmatrix} 0 & C \\ E & 0 \end{Vmatrix}, \qquad C = A_1(u^2).$$

Это сразу показывает, что в надлежащей системе координат матрица, соответствующая элементу $u$, однозначно определяется представлением $\mathfrak{A}(\gamma')$.

## 9. Представления собственно ортогональной группы

Равенство (4.4) можно следующим образом установить как предложение, относящееся к операции $\sigma$, определенной формулой (7.4). Собственно ортогональная подстановка $A = \|a(ik)\|$ индуцирует в пространстве всех косо-симметричных тензоров $F$ ранга $\rho$ то же самое преобразование, что и в пространстве соответствующих им тензоров $\sigma F$ ранга $n - \rho$. Преобразования же, индуцируемые несобственно ортогональными $A$, противоположны (т. е. каждое равно другому, взятому со знаком минус). Пусть $T$, $T'$ — две ассоциированные допустимые диаграммы и (7.2) — длины строк диаграммы $T$. Когда $F$ пробегает $\mathrm{P}_0(T')$, то тензор $\sigma F$, определяемый формулой (7.5), пробегает некоторое инвариантное подпространство $\sigma\mathrm{P}_0(T')$, и соответствующее представление $\langle\sigma\mathrm{P}_0(T')\rangle$ полной ортогональной группы ассоциированно с $\langle\mathrm{P}_0(T')\rangle$. Как мы заметили, по крайней мере для одного из тензоров $F$ подпространства $\mathrm{P}_0(T')$, а именно для $F_0(i_{T'})$, соответствующий тензор $\sigma F$ лежит в подпространстве $\mathrm{P}_0(T)$, определенном ассоциированной диаграммой симметрии $T$. Те $F$ из $\mathrm{P}_0(T')$, для которых $\sigma F$ лежит в $\mathrm{P}_0(T)$, очевидно, образуют в $\mathrm{P}_0(T')$ инвариантное подпространство; вследствие неприводимости $\mathrm{P}_0(T')$, это подпространство, не будучи нулевым, должно совпадать со всем $\mathrm{P}_0(T')$. Другими словами, операция $\sigma$ взаимно однозначно отображает $\mathrm{P}_0(T')$ на $\mathrm{P}_0(T)$, и представления $\langle\mathrm{P}_0(T)\rangle$ и $\langle\mathrm{P}_0(T')\rangle$, соответствующие ассоциированным диаграммам, сами ассоциированы.

В случае четной размерности $n = 2\nu$, $T$ может быть самоассоциированной диаграммой. Для таких диаграмм удобно модифицировать определение операции $\sigma$, отображающей теперь $\mathrm{P}_0(T)$ на себя, вводя в левую часть определяющего соотношения (7.4) множитель $i^\nu$, $i = \sqrt{-1}$. Тогда операция $\sigma$ становится инволюторной, поскольку „четный или нечетный“ характер перестановки

$$i_1^* \dots i_\nu^* i_1 \dots i_\nu$$

получается из аналогичного характера перестановки

$$i_1 \dots i_\nu i_1^* \dots i_\nu^*$$

умножением на $(-1)^\nu$.

Мы теперь подготовлены к спуску к *собственно* ортогональной группе. Согласно результатам предыдущего параграфа, неприводимое представление $\mathfrak{A}^T$ полной группы остается неприводимым при ограничении собственными вращениями, если диаграмма $T$ — не самоассоциированная. Представления же $\mathfrak{A}^T$ и $\mathfrak{A}^{T'}$, соответствующие двум ассоциированным диаграммам $T$ и $T'$, становятся теперь эквивалентными. Представление $\mathfrak{A}^T$ при самоассоциированной диаграмме симметрии $T$ разбивается на две части. Действительно, каждый тензор $F$ из пространства $\mathrm{P}_0(T)$ можно разложить в сумму „четного“ или „нечетного“ таких тензоров $F_1$, $F_2$ с помощью равенства

$$F = \frac{1}{2}(F + \sigma F) + \frac{1}{2}(F - \sigma F); \qquad \sigma F_1 = F_1, \qquad \sigma F_2 = -F_2.$$

Оба подпространства — четных и нечетных тензоров — инвариантны относительно собственно ортогональных преобразований, тогда как любое несобственно ортогональное преобразование например $J_n$, переводит их одно в другое. Поэтому оба подпространства имеют одинаковую размерность и ни одно из них не пусто. Из наших общих рассмотрений вытекает, что относительно собственно ортогональной группы они неприводимы и неэквивалентны. Никакие другие эквивалентности, кроме явно указанных нами, не вызываются снижением к собственно ортогональной группе.

Между прочим, случай нечетной размерности, где не происходит никакого приведения, допускает гораздо более простую трактовку. Действительно, тогда $-E$ есть несобственно ортогональное преобразование, перестановочное со всеми элементами нашей группы. Так как построенные нами рациональные представления полной группы абсолютно неприводимы, то этот элемент, в силу леммы Шура, должен при любом из наших представлений представляться $\mu$-кратным единичной матрицы, причем множитель $\mu$ будет равен либо $+1$, либо $-1$, поскольку из $(-E)^2 = E$ следует $\mu^2 = 1$.

Мы суммируем полученные результаты следующим образом:

Теорема (V.9.A). *При ограничении собственно ортогональной группой каждое неприводимое представление* $\mathfrak{A}^T$ *полной ортогональной группы остается неприводимым, если только диаграмма T не самоассоциирована; в последнем случае* $\mathfrak{A}^T$ *разбивается на две неприводимые части одинаковой степени, с той, однако, оговоркой, что при* $n \equiv 2 \pmod 4$ *к основному полю нужно присоединить* $\sqrt{-1}$. *Ассоциированные представления становятся эквивалентными, но никаких других эквивалентностей не появляется.*

Этой теоремой одновременно разрешается и вопрос о неэквивалентных неприводимых представлениях алгебры $\mathfrak{A}^{(f)}_{+}$, определенной равенствами (2.2) и (4.6), который представлялся нам трудно поддающимся лобовой атаке [7].

# *ГЛАВА VI*

# СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППА

## 1. Векторные инварианты симплектической группы *)

Изучение симплектической группы, проявляющей тесную аналогию с ортогональной группой, предоставит нам случай повторить в ускоренном темпе все наше построение, развертывавшееся на протяжении предыдущих глав.

В то время как ортогональная группа состоит из всех преобразований, оставляющих инвариантной невырожденную симметричную билинейную форму (скалярное произведение), симплектическая группа $Sp(n)$ определяется как совокупность всех преобразований, при которых остается неизменной заданная невырожденная косо-симметричная билинейная форма $[xy]$. Мы можем считать, что это „косое произведение" двух векторов

$$x = (x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_\nu, x'_\nu) \quad \text{и} \quad y$$

задано в нормированной форме

$$[xy] = (x_1 y'_1 - x'_1 y_1) + \ldots + (x_\nu y'_\nu - x'_\nu y_\nu), \tag{1.1}$$

так что $n = 2\nu$ фундаментальных векторов $e_\alpha$, $e'_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ удовлетворяют соотношениям

$$[e_\alpha e_\beta] = [e'_\alpha e'_\beta] = 0, \quad [e_\alpha e'_\beta] = -[e'_\alpha e_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

(симплектическая система координат). Существование невырожденной косо-симметричной формы требует, чтобы число измерений $n$ было *четным*, $n = 2\nu$.

---

*) Первоначально я придерживался наименования „комплекс-группа", как намекающего на комплексы прямых, поскольку последние определяются обращением в нуль антисимметричных билинейных форм. Но оно становилось все более и более двусмысленным вследствие коллизии со словом „комплексная" в побочном числовом смысле. Поэтому я предлагаю заменить это слово соответствующим греческим прилагательным „симплектическая". Диксон называет эту группу „абелевой линейной группой" в честь впервые изучавшего ее Абеля.

Действительно, любая заданная такая форма $[xy]$ при надлежащем выборе системы координат переходит в (1.1), причем, в противоположность аналогичной нормализации скалярного произведения,

$$(xy) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

здесь преобразование — полностью рациональное, даже не требующее присоединения квадратных корней. Для доказательства начнем с произвольного вектора $e_1 \neq 0$. Вследствие невырожденности формы $[xy]$ мы можем выбрать второй вектор $e'_1$ так, чтобы $[e_1e'_1] \neq 0$, и затем умножением его на надлежащий численный множитель добиться того, чтобы $[e_1e'_1] = 1$. В силу соотношения $[e_1e_1] = 0$ векторы $e_1$ и $e'_1$ линейно независимы, и векторы $x$, удовлетворяющие одновременно уравнениям

$$[e_1x] = 0, \quad [e'_1x] = 0,$$

образуют подпространство $\mathrm{P}_1$, на два измерения меньше. Всякий вектор $x$ может быть записан в виде

$$x = \xi_1e_1 + \xi'_1e'_1 + x_*,$$

где $x_* \in \mathrm{P}_1$; для этого следует просто положить

$$\xi_1 = [xe'_1], \quad \xi'_1 = -[xe_1].$$

Наше утверждение легко доказывается теперь индукцией по размерности $n = 2\nu$. Одновременно мы установили существование симплектической системы координат, первым фундаментальным вектором $e_1$ которой служит произвольный, наперед заданный ненулевой вектор, — и это, разумеется, при любом числовом поле (характеристики 0).

В то время как в случае ортогональной группы лишь *квадрат* определителя $n$ векторов $[x^1 \ldots x^n]$ выражается через их скалярные произведения, здесь мы находимся в более счастливом положении: сам этот определитель является агрегатом косых произведений. Поэтому ничего подобного различию между собственно и несобственно ортогональными преобразованиями здесь не появляется, и каждое симплектическое преобразование имеет определителем 1.

Для доказательства этих двух утверждений образуем знакопеременную сумму

$$\frac{1}{\nu!2^\nu}\sum \pm [x^1x^2][x^3x^4]\ldots[x^{n-1}x^n], \tag{1.3}$$

распространенную на все $n!$ перестановок $n$ независимых векторов $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Множитель $\frac{1}{\nu!2^\nu}$ приписан потому, что каждый член указанной суммы появляется в $\nu!2^\nu$ одинаковых копиях, получающихся из него при тех подстановках, которые не разлучают ни одну пару аргументов, соединенных в этом члене прямыми скобками $[\,]$. Пусть $[xy]$ означает сперва произвольную косо-симметричную форму

$$[xy]=\sum_{i,k}\gamma(ik)\,x_i y_k. \tag{1.4}$$

Каноническую форму (1.1) мы будем обозначать через $\sum\varepsilon(ik)\,x_i y_k$, так что $I=\|\varepsilon(ik)\|$ есть матрица

$$I=\left\|\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}\right\|\dotplus\left\|\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}\right\|\dotplus\cdots\dotplus\left\|\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}\right\|$$

($\nu$ слагаемых).

Выражение (1.3) принимает вид

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n}\gamma(i_1 i_2)\ldots\gamma(i_{n-1}i_n)\sum\pm x^1_{i_1}x^2_{i_2}\ldots x^n_{i_n},$$

где внутренняя сумма снова распространена на все перестановки векторов $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Эта внутренняя сумма отлична от нуля, лишь если $i_1, \ldots, i_n$ получаются из ряда $1, \ldots, n$ какой-нибудь подстановкой $s$ и равна в этом случае $\pm[x^1x^2\ldots x^n]$, сообразно с четностью или нечетностью подстановки $s$. Тем самым мы приведены к рассмотрению „пфаффиана“

$$\mathrm{Pf}\,\{\gamma(ik)\}=\frac{1}{\nu!2^\nu}\sum\pm\gamma(i_1 i_2)\ldots\gamma(i_{n-1}i_n), \tag{1.5}$$

где сумма распространена знакопеременно на все перестановки $i_1 i_2\ldots i_{n-1}i_n$ ряда $1, \ldots, n$. Пфаффиан играет для антисимметричной формы (1.4) ту же роль, какую определитель играет для симметричных форм. В результате получаем формулу

$$\frac{1}{\nu!2^\nu}\sum\pm[x^1x^2]\ldots[x^{n-1}x^n]=\mathrm{Pf}\,\{\gamma(ik)\}\cdot[x^1x^2\ldots x^n]. \tag{1.6}$$

Пусть форма (1.4) под действием линейного преобразования

$$x_i=\sum_j a_{ji}x'_j$$

(когредиентно применяемого к $x$ и $y$) переходит в

$$\sum_{i,k}\gamma'(ik)\,x'_i y'_k.$$

Формула (1.6) сразу приводит к соотношению

$$(1.7)\qquad \mathrm{Pf}\,\{\gamma'(ik)\} = \mathrm{Pf}\,\{\gamma(ik)\}\cdot\det(a_{ij}).$$

Если $[xy]$ взять в канонической форме (1.1), то пфаффиан принимает значение $\mathrm{Pf}\,\{\varepsilon(ik)\} = 1$. Поэтому (1.7) показывает, что подстановка $A$, сохраняющая неизменной эту форму, должна иметь определителем 1. В этом и состояло второе наше утверждение. Что же касается первого утверждения, то, если сохранить за косым произведением ту же каноническую форму, равенство (1.6) примет более простой вид

$$(1.8)\qquad [x^1x^2\ldots x^n] = \frac{1}{\nu!2^\nu}\sum \pm [x^1x^2]\ldots[x^{n-1}x^n]$$

и даст, таким образом, требуемое выражение определителя $n$ векторов через косые произведения.

Теорема (VI.1.A). (Первая основная теорема для симплектической группы.) *Все векторные инварианты симплектической группы, зависящие от произвольного числа ковариантных и контравариантных векторов* $x, \ldots$ *и* $\xi, \ldots$, *выражаются через базисные инварианты типа*

$$(1.9)\qquad [xy],\ (\xi x),\ [\xi\eta].$$

Доказательство[1]. Рассмотрим сперва случай, когда имеются одни лишь ковариантные векторы $x, \ldots$ Доказательство можно провести точно по тому же плану, что и для ортогональной группы, с упрощением, связанным с тем, что здесь не появляется детерминантного множителя, чем, в то же время, исключается различение собственных и несобственных преобразований. Однако, чтобы индукция по размерности $n$ протекала беспрепятственно, надо сделать еще одно замечание. При рассмотрении инварианта $f$, зависящего от $n-1$ векторов $x, y, \ldots$, вводится новая симплектическая система координат, относительно которой первые компоненты $x_1, y_1, \ldots$ векторов $x, y, \ldots$ обращаются в нуль. Здесь $x, y, \ldots$ предполагаются численно заданными и линейно независимыми. Будучи, таким образом, приведены к рассмотрению функции

$$f_0\begin{pmatrix} x'_1, x_2, x'_2, & \ldots \\ y'_1, y_2, y'_2, & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0, x'_1, x_2, x'_2, & \ldots \\ 0, y'_1, y_2, y'_2, & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{pmatrix},$$

мы попали бы в затруднительное положение, если бы из $f$ вместе с $x_1, y_1, \ldots$ не исчезли и аргументы $x'_1, y'_1, \ldots$; индукция от $2(\nu-1)$ к $2\nu$ измерениям не проходила бы. К счастью, это затруднение можно преодолеть посредством следующего простого рассуждения. Подвергнем компоненты $x_1$, $x'_1$, совершенно не трогая остальных компонент $x_2$, $x'_2$, ..., произвольному унимодулярному преобразованию

$$\begin{aligned} x_1 &\to \alpha x_1 + \beta x'_1, \\ x'_1 &\to \gamma x_1 + \delta x'_1 \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Так как это — симплектическое преобразование, а $f$ — инвариант, то имеем:

$$(1.10) \qquad f(0, x'_1;\ 0, y'_1;\ \ldots) = f(\beta x'_1, \delta x'_1;\ \beta y'_1, \delta y'_1;\ \ldots).$$

Соотношение (1.10) выполняется для произвольных чисел $\beta$ и $\delta$ с одним лишь условием, что $\delta \neq 0$; действительно, достаточно взять тогда $\alpha = \frac{1}{\delta}$, $\gamma = 0$. Предложение об алгебраической несущественности неравенств показывает, что (1.10) есть тождество относительно переменных $\beta$ и $\delta$. Следовательно, (1.10) остается в силе и для значений $\beta = 0$, $\delta = 0$. Получающееся таким образом равенство

$$f(0, x'_1;\ 0, y'_1;\ \ldots) = f(0, 0;\ 0, 0;\ \ldots)$$

показывает, что $f_0(x_1; y'_1; \ldots)$ в действительности не зависит от $x'_1, y'_1, \ldots$

Введение контравариантных векторных аргументов наряду с ковариантными вряд ли менее тривиально, чем в случае ортогональной группы. Действительно, соотношения

$$(1.11) \qquad x_1 = \xi'_1,\quad x'_1 = -\xi_1,\quad \ldots,\quad x_\nu = \xi'_\nu,\quad x'_\nu = -\xi_\nu$$

связывают с заданным контравариантным вектором $\xi$ ковариантный вектор $x = \xi'$, поскольку эти равенства могут быть выражены одним соотношением

$$[xy] = (\xi y),$$

тождественно выполняющимся относительно ковариантного аргумента $y$, а это соотношение инвариантно относительно симплектических преобразований. Замечая, что

$$[\xi' y] = (\xi y),\quad [\xi' \eta'] = -[\xi \eta],$$

мы получаем, таким образом, наряду с $[xy]$, и два других типовых инварианта таблицы (1.9).

Теорема (VI.1.B). (Вторая основная теорема для симплектической группы.) *Каждое соотношение между косыми произведениями является алгебраическим следствием соотношений следующих* $\nu$ *типов*:

$$J_1 \equiv \sum \pm [x_0 y_0][x_1 x_2] \dots [x_{n-1} x_n] = 0,$$
$$J_2 \equiv \sum \pm [x_0 y_0][x_1 y_1][x_2 y_2][x_3 x_4] \dots [x_{n-1} x_n] = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$J_\nu = \sum \pm [x_0 y_0][x_1 y_1] \dots [x_n y_n] = 0.$$

Сумма $\sum$ распространяется знакопеременно на все перестановки $n+1$ векторов $x_0, x_1, \dots, x_n$. Левые части, будучи косо-симметричными полилинейными формами относительно этих $n+1$ векторов, необходимо обращаются в нуль.

Доказательство в основном аналогично данному в § 17 главы II для полной ортогональной группы. Однако следует обратить внимание на то, что теперь не исключена возможность объединения двух из „новых символов“ $x'$ в один множитель типа $[x'_0 x'_1]$; действительно, это произведение теперь не симметрично, а косо-симметрично и потому не обращается при альтернировании в нуль. В этом — причина появления, кроме соотношения $J_\nu$, соответствующего соотношению $J$ теоремы (II.17.A), еще соотношений $J_1, J_2, \dots, J_{\nu-1}$. Далее, сравнение Капелли сводит интересующую нас теорему к тому факту, что между косыми произведениями $n$ векторов $x_i$ нет никаких соотношений. Последнее вытекает из возможности выбора $n$ векторов $x_i$ так, чтобы матрица их косых произведений $[x_i x_k]$ совпадала с произвольной наперед заданной косо-симметричной матрицей; построение этих векторов $x_i$ может быть выполнено чисто рациональным путем. Но можно поступать также аналогично тому, как мы действовали в случае ортогональной группы.

## 2. Параметризация и унитарное ограничение

Установив первую основную теорему для симплектических инвариантов, мы повторяем затем шаг за шагом путь, которому следовали в случае ортогональной группы, отмечая лишь те случаи, где требуются не совсем тривиальные модификации.

Согласно лемме (II.10.A) параметризация Кэли

(2.1) $$A = (E - S)(E + S)^{-1}, \quad S = (E - A)(E + A)^{-1},$$

применимая к неисключительным матрицам $A$ (и $S$), превращает квадратное уравнение

(2.2) $$A^* I A = I$$

в линейное

(2.3) $$S^* I + I S = 0.$$

На всем дальнейшем протяжении этого параграфа $S$ будет обозначать *инфинитезимальное симплектическое преобразование*, т. е. матрицу, удовлетворяющую уравнению (2.3). Располагая индексы в порядке $1, \ldots, \nu, 1', \ldots, \nu'$, легко убеждаемся в том, что

(2.4) $$S = \begin{Vmatrix} s_{\alpha\beta} & t_{\alpha\beta} \\ t'_{\alpha\beta} & s'_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, \nu),$$

где

(2.5) $\| t_{\alpha\beta} \|$, $\| t'_{\alpha\beta} \|$ симметричны и $s'_{\alpha\beta} + s_{\beta\alpha} = 0$;

число параметров, от которых $S$ линейно зависит, сводится к

(2.6) $$N = \nu(2\nu + 1) = \frac{1}{2} n(n + 1).$$

До сих пор симплектический случай представлялся существенно более простым, чем ортогональный; вещи, носившие там квадратичный характер или требовавшие извлечения квадратных корней, становились здесь линейными или рациональными. Но в тот момент, когда мы должны обратиться к изучению исключительных симплектических $A$, мы наталкиваемся на препятствие. Аналогом вещественных ортогональных преобразований служат во многих отношениях не вещественные, а, скорее, *унитарные* симплектические преобразования. Мы оперируем в поле $K^\dagger$ всех комплексных чисел или, более обще, в поле $k^\dagger = (k, \sqrt{-1})$, получающемся путем присоединения $i = \sqrt{-1}$ к какому-нибудь вещественному полю $k$. Числа из $k$ являются „вещественными" числами в $k^\dagger$. Начиная отсюда, $\bar{a}$ будет всюду обозначать число, комплексно сопряженное с $a$:

(2.7) $$a = \alpha + i\beta, \quad \bar{a} = \alpha - i\beta \quad (\alpha, \beta \in k).$$

Форма вида

$$G(x, y) = \sum g_{ik}\bar{x}_i y_k \tag{2.8}$$

линейна относительно $y$ и „антилинейна“ относительно $x$:

$$\left.\begin{array}{ll} G(x, y+y') = G(x, y) + G(x, y'), & G(x, \lambda y) = \lambda G(x, y) \\ G(x+x', y) = G(x, y) + G(x', y), & G(\lambda x, y) = \bar{\lambda} G(x, y) \end{array}\right\} \{\lambda \in k^{\dagger}\}.$$

При применении к $x$ и $y$ одного и того же преобразования $x \longrightarrow Ax$, матрица $G = \| g_{ik} \|$ этой формы переходит в

$$G' = \bar{A}^* G A.$$

Лемма (II.10.A) и ее доказательство переносятся на этот случай, показывая, что формулы (2.1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между неисключительными $A$ и $S$, удовлетворяющими, соответственно, условиям

$$\bar{A}^* G A = G, \quad \bar{S}^* G + GS = 0. \tag{2.9}$$

Выражение (2.8) называется эрмитовым, если

$$G(y, x) = \overline{G(x, y)} \quad \text{или} \quad g_{ki} = \bar{g}_{ik},$$

а

$$G(x, x) = \sum_{i, k} g_{ik}\bar{x}_i x_k \tag{2.10}$$

есть тогда соответствующая *эрмитова форма*, принимающая вещественные значения. Единичную форму

$$\begin{cases} (xx)_H = \bar{x}_1 x_1 + \ldots + \bar{x}_n x_n, \\ (xy)_H = \bar{x}_1 y_1 + \ldots + \bar{x}_n y_n = \bar{x}^* y, \end{cases} \tag{2.11}$$

можно положить в основу модифицированной эвклидовой векторной геометрии над комплексным полем $k^{\dagger}$, предоставляя $(xy)_H$ роль скалярного произведения. Вследствие равенства

$$(yx)_H = \overline{(xy)_H}$$

унитарная перпендикулярность, определяемая требованием $(xy)_H = 0$, является взаимным соотношением. *Унитарные преобразования* $A$, оставляющие форму (2.11) неизменной,

$$\bar{A}^* A = E \text{ и, следовательно, } A\bar{A}^* = E,$$

образуют группу $U(n)$, являющуюся в этой геометрии аналогом ортогональной группы. Унитарная система координат $e_1, \ldots, e_n$

удовлетворяет соотношениям

$$(e_i e_k)_H = \delta_{ik}.$$

Любая неисключительная унитарная матрица $A$ выражается формулой (2.1) через „инфинитезимальную унитарную“ матрицу, т. е. матрицу $S = \| s_{ik} \|$, для которой

$$\bar{S}^* + S = 0 \quad \text{или} \quad \bar{s}_{kl} + s_{ik} = 0. \tag{2.12}$$

Вследствие положительной определенности формы $(xx)_H$, пространство P″, унитарно-перпендикулярное к заданному подпространству P′, является дополнительным к P′, так что все векторное пространство P расщепляется на сумму P′ + P″. Классическое индуктивное построение унитарной системы координат проводится тем же путем, что и в обычной вещественной эвклидовой геометрии. Лемме (V.2.A) соответствует

Лемма (VI.2.A). *Любое множество унитарных преобразований над полем* $k^\dagger = (k, \sqrt{-1})$ (*$k$ вещественно*) *вполне приводимо.*

Рассмотрим теперь пересечение $USp(n)$ групп $U(n)$ и $Sp(n)$; элементы $A$ этой группы одновременно и симплектичны, и унитарны. Если элемент $A$ — неисключительный, то подстановка (2.1) переводит его в инфинитезимальный элемент $S$ той же группы, характеризуемый обоими соотношениями (2.3) и (2.12). Соотношение (2.12) налагает на параметры в (2.4) ограничения

$$\bar{s}_{\alpha\beta} + s_{\beta\alpha} = 0 \quad (\bar{s}'_{\alpha\beta} + s'_{\beta\alpha} = 0) \quad \text{и} \quad \bar{t}_{\alpha\beta} + t'_{\alpha\beta} = 0,$$

или, если положить

$$\left\{ \begin{aligned} & t_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta} + \sqrt{-1}\, v'_{\alpha\beta}, \quad t'_{\alpha\beta} = -v_{\alpha\beta} + \sqrt{-1}\, v'_{\alpha\beta} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (v_{\beta\alpha} = v_{\alpha\beta}, \ v'_{\beta\alpha} = v'_{\alpha\beta}), \\ & s_{\alpha\alpha} = \sqrt{-1} \cdot u_{\alpha\alpha};\ s_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} + \sqrt{-1}\, u'_{\alpha\beta}; \\ & \qquad\qquad s_{\beta\alpha} = -u_{\alpha\beta} + \sqrt{-1}\, u'_{\alpha\beta} \ (\text{для } \alpha < \beta), \end{aligned} \right. \tag{2.13}$$

— условие *вещественности* на $N$ параметров $u$, $u'$, $v$, $v'$.

Относительно унитарной группы вектор $\xi = (\bar{x}_i)$, порождаемый ковариантным вектором $x = (x_i)$, контрагредиентен. Комбинируя это с (1.11), мы видим, что соотношения

$$u_\alpha = -\bar{x}'_\alpha, \quad u'_\alpha = \bar{x}_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, \nu) \tag{2.14}$$

ассоциируют с любым ковариантным вектором $x$ такой же вектор $u$ инвариантным образом относительно $USp(n)$. Действительно, соотношения (2.14) можно объединить в одно тождество

$$(uy)_H = [xy]$$

относительно $y$. Пользуясь обозначением

$$u = \tilde{x}, \quad x = -\tilde{u},$$

имеем тогда:

$$(\tilde{x}y)_H = [xy], \quad (xy)_H = -[\tilde{x}y];$$

$$(2.15) \qquad (\tilde{x}y)_H = -(\tilde{y}x)_H \text{ или } (\tilde{x}\tilde{y})_H = (yx)_H = \overline{(xy)_H}.$$

Возможно ли определить векторный базис $e_\alpha$, $e'_\alpha$, который был бы одновременно симплектичным и унитарным,

$$(2.16) \qquad \begin{cases} [e_\alpha e_\beta] = [e'_\alpha e'_\beta] = 0, & [e_\alpha e'_\beta] = -[e'_\alpha e_\beta] = \delta_{\alpha\beta}; \\ (e_\alpha e_\beta)_H = (e'_\alpha e'_\beta)_H = \delta_{\alpha\beta}, & (e_\alpha e'_\beta)_H = (e'_\alpha e_\beta)_H = 0, \end{cases}$$

и первый вектор которого $e_1$ совпадал бы с наперед заданным вектором $e$? Разумеется, сперва нужно будет нормировать $e$ так, чтобы $(ee)_H$ сделалось $= 1$. Но $(ee)_H$ есть сумма квадратов в вещественном поле $k$, так как [см. (2.7)]

$$\bar{a}a = \alpha^2 + \beta^2.$$

Следовательно, требуемое нормирование можно выполнить пифагоровским расширением поля $k$, не нарушающим вещественности последнего. Примем поэтому, что $(ee)_H = 1$. Тогда пара векторов

$$e_1 = e, \quad e'_1 = \tilde{e}$$

удовлетворяет всем требованиям (2.16) для $\alpha = \beta = 1$. Сверх того, как легко следует из (2.15), подпространство $\mathrm{P}_1$ векторов $x$, удовлетворяющих уравнениям

$$[e_1 x] = 0, \quad [e'_1 x] = 0,$$

или, что то же,

$$(ex)_H = 0, \quad (\tilde{e}x)_H = 0,$$

замкнуто относительно операции $\tilde{}$. Это позволяет выполнить требуемое нам индуктивное построение системы координат.

Пусть теперь $A = \| a_{ik} \|$ — *исключительный* элемент из $USp(n)$. Подпространство $\mathrm{P}^0$ векторов $x$, удовлетворяющих уравнению

$$x + Ax = 0,$$

выдерживает операцию $\tilde{}$, так как из $y = Ax$ следует $\tilde{y} = A\tilde{x}$. Легко видеть, что это обстоятельство, благодаря свободе пифагоровских присоединений к $k$, позволяет выбрать в $\mathrm{P}^0$ унитарную симплектическую систему координат $e_1, \tilde{e}_1, \ldots, e_p, \tilde{e}_p$ и расширить ее до подобной же системы для всего векторного пространства $\mathrm{P}$. Тогда, как и в случае ортогональной группы, получаем:

Лемма (VI.2.B). *Любая унитарная симплектическая матрица $A$ над $(k, \sqrt{-1})$ является произведением двух перестановочных неисключительных унитарных симплектических матриц $A_1$, $A_2$.*

Понятие *формального симплектического инварианта* вводится очевидным образом. Для доказательства того, что всякий такой инвариант может быть выражен через косые произведения, мы оперируем в гауссовском поле $(\varkappa, \sqrt{-1})$. При этом существенное значение имеют следующие два замечания. Для любых $n-1$ векторов $x^1, \ldots, x^{n-1}$ с компонентами из этого поля можно определить унитарную симплектическую систему координат $e_1, e_1', \ldots, e_\nu, e_\nu'$, первый вектор которой $e_1 = e$ удовлетворяет системе $n-1$ уравнений

$$[ex^1] = 0, \quad \ldots, \quad [ex^{n-1}] = 0.$$

Соответствующее унитарное симплектическое преобразование, обращающее в нуль $x_1'$-компоненту одновременно у всех $n-1$ аргументов $x^1, \ldots, x^{n-1}$, вообще говоря, потребует пифагоровских расширений поля $\varkappa$ до некоторого вещественного поля $k$. Второе замечание относится к форме $f(x, x'; y, y'; \ldots)$, зависящей от *бинарных* векторов $(x, x')$, $(y, y'), \ldots$ и формально инвариантной относительно двумерной симплектической группы; оно заключается в установлении того, что такая форма, не содержащая вторых компонент $x', y', \ldots$, будет постоянной. Действительно,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \frac{1}{\alpha} \end{matrix} \right\|$$

при $\alpha \neq 0$ и $\neq -1$ будет матрицей неисключительного симплектического преобразования, переводящего

$$f(x, 0; y, 0; \ldots) \quad \text{в} \quad f(\alpha x, \gamma x; \alpha y, \gamma y; \ldots).$$

Равенство двух этих выражений будет тождеством относительно $\alpha$ и $\gamma$ и будет, таким образом, выполняться даже для $\alpha = \gamma = 0$.

Довольно любопытно, что во всех предшествующих рассмотрениях ту же службу, что и $k^{\dagger}=(k, \sqrt{-1})$, могло бы сослужить нам и *вещественное* поле $k$; унитарные симплектические матрицы были бы тогда ортогональными и симплектическими. (Эта группа, пересечение $O(n)$ и $Sp(n)$, пожалуй, заслуживала бы большего, чем лишь это беглое упоминание.) Однако для определения обертывающей алгебры представляется существенным применение *унитарного приема*; успех его основывается на том простом замечании, что ограничение унитарностью матрицы $S$, (2.4), сводится к ограничению *вещественностью* входящих в нее параметров и потому алгебраически несущественно. Действительно, согласно лемме (I.1.A), заданный полином $\Phi(S)$, зависящий от $N$ параметров

$$t_{\alpha\beta},\quad t'_{\alpha\beta}\quad (\alpha \leqslant \beta) \quad \text{и} \quad s_{\alpha\beta} \quad (\text{все } \alpha,\ \beta)$$

матрицы $S$, или от параметров $u$, $u'$, $v$, $v'$, введенных формулами (2.13), будет тождественно равен нулю, если он равен нулю для всех вещественных значений (достаточно было бы даже всех рациональных значений) последних параметров, не обращающих в нуль

$$\Delta(S)=\det(E+S).$$

## 3. Обертывающая алгебра и представления симплектической группы

Рассмотрим теперь преобразование $\Pi_f(A)$, индуцируемое в тензорном пространстве $P_f$ преобразованием

$$A=(E-S)(E+S)^{-1}, \tag{3.1}$$

где $S$ — общая инфинитезимальная симплектическая матрица (2.4), (2.5) с неопределенными элементами. Мы хотим показать, что $P_f$ вполне приводимо относительно $\Pi_f(A)$. Будем сперва оперировать в основном поле $\varkappa$. Пусть $\Sigma$ — инвариантное подпространство пространства $P_f$, натянутое на линейно независимые рациональные тензоры $F_1, \ldots, F_p$. Подпространство $\Sigma'$, ортогональное к $\Sigma$ в смысле метрики (V.2.1), будет натянуто на некоторые рациональные тензоры $F'_1, \ldots, F'_q$; $p+q=n^f$. Перейдем теперь к гауссовскому полю $\varkappa^{\dagger}=(\varkappa, \sqrt{-1})$, так что $\Sigma$, $\Sigma'$ будут состоять из всех линейных комбинаций тензоров $F_1, \ldots, F_p$, соответственно $F'_1, \ldots, F'_q$, с коэффициентами из $\varkappa^{\dagger}$. Тогда каждый тензор $F'$ из $\Sigma'$ будет также *унитарно* ортогонален к каждому тензору $F$ из $\Sigma$:

$$\sum_{(i)} \bar{F}(i_1 \dots i_f)\, F'(i_1 \dots i_f) = 0.$$

Элементы матрицы, описывающей подстановку $\Pi_f(A)$ по отношению к системе координат $F_1, \dots, F_p$; $F'_1, \dots, F'_q$, являются рациональными функциями от $S$ со знаменателем $|E+S|^f$. Из $2 \times 2$ частей, на которые расщепляется эта матрица в соответствии с разложением $P_f = \Sigma + \Sigma'$, верхний правый прямоугольник будет пустым (инвариантность подпространства $\Sigma$). Мы утверждаем, что то же верно и для нижнего левого прямоугольника; другими словами, $\Sigma'$ также инвариантно. Чтобы убедиться в этом, подставим в качестве $S$ произвольную численную неисключительную инфинитезимальную унитарную симплектическую матрицу над $(\varkappa, \sqrt{-1})$. Соответствующее $A$ унитарно, и *то же верно для* $\Pi_f(A)$; поэтому элементы указанного прямоугольника, в силу леммы (VI.2.A), при такой подстановке обращаются в нуль. Опираясь на заключительное замечание последнего параграфа, выводим отсюда, что эти элементы тождественно равны нулю.

Теперь открыт путь для установления всех теорем, аналогичных доказанным в случае ортогональной группы[2]. При этом алгебра $\mathfrak{A}^{(f)}$ в $\mathfrak{R}^{(f)}$ описывается наложением на ряд $A^{(f)} = (A_f, A_{f-2}, \dots, A_0)$ бисимметричных матриц

$$A_v = \| a(i_1 \dots i_v;\, k_1 \dots k_v) \|$$

$(v = 2, \dots, f)$ следующих уравнений:

$$\sum_{k_1, k_2} \varepsilon(k_1 k_2)\, a(i_1 \dots i_v;\, k_1 \dots k_v) = \varepsilon(i_1 i_2) \cdot a(i_3 \dots i_v;\, k_3 \dots k_v),$$

$$\sum_{i_1, i_2} \varepsilon(i_1 i_2)\, a(i_1 \dots i_v;\, k_1 \dots k_v) = \varepsilon(k_1 k_2) \cdot a(i_3 \dots i_v;\, k_3 \dots k_v).$$

Теорема (VI.3.A). *$\mathfrak{A}^{(f)}$ есть обертывающая алгебра группы всех $\Pi^{(f)}(A)$, индуцируемых симплектическими преобразованиями $A$. Это верно при любом поле $k$ характеристики нуль; можно даже ограничиться внутри $Sp(n)$ рациональными неисключительными $A$.*

Или, в другой форме:

Теорема (VI.3.B). *Пусть $A = \|a(ik)\|$ — общая матрица, состоящая из $n^2$ независимых переменных $a(ik)$, и $S$ — общая* *инфинитезимальная симплектическая матрица. Каждый полином $\Phi(A)$ формальной степени $f$ от $n^2$ переменных $a(ik)$, формально обращающийся в нуль при подстановке*

$$A = (E - S)(E + S)^{-1},$$

*является линейной комбинацией*

$$\sum L_{i_1 i_2} D_{i_1 i_2} + \sum L^*_{k_1 k_2} D^*_{k_1 k_2}$$

*форм частного вида*

$$D_{i_1 i_2} = \sum_{k_1, k_2} \varepsilon(k_1 k_2)\, a(i_1 k_1)\, a(i_2 k_2) - \varepsilon(i_1 i_2),$$

$$D^*_{k_1 k_2} = \sum_{i_1, i_2} \varepsilon(i_1 i_2)\, a(i_1 k_1)\, a(i_2 k_2) - \varepsilon(k_1 k_2)$$

*с полиномиальными коэффициентами $L$ формальной степени $f - 2$.*

Эта теорема определяет базис для *симплектического простого идеала.* Если не придавать важности ограничению, налагаемому на формальные степени, то одна из двух базисных систем $D_{i_1 i_2}$, $D^*_{k_1 k_2}$ излишня.

След тензора $F(i_1 i_2 i_3 \ldots i_f)$ по первым двум аргументам определяется теперь формулой

$$\sum_{i_1, i_2} \varepsilon(i_1 i_2) F(i_1 i_2 i_3 \ldots i_f).$$

Тензоры ранга $f$ с нулевыми следами образуют пространство $P^0_f$. Налагая на них условие симметрии, соответствующее заданной диаграмме $T$, получаем подпространство $P_0(T)$, неприводимо инвариантное относительно алгебры $\mathfrak{A}_f$ или группы $\Pi_f(Sp(n))$. Однако $P_0(T)$ будет пустым, *за исключением тех случаев, когда $T$ состоит из не более чем $\nu = \frac{1}{2} n$ строк* (допустимые диаграммы). (Это упрощение по сравнению с ортогональным случаем вызывается тем, что уже сам определитель $n$ векторов, а не только произведение двух таких определителей, как в (V.7.1), выражается через косые произведения.) Будем снова характеризовать диаграмму $T$ длинами $f_1, \ldots, f_\nu$ ее строк:

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_\nu \geqslant 0.$$

$\mathrm{P}_0(T) = \mathrm{P}_0(f_1 \dots f_\nu)$ есть поле действия неприводимого представления $\langle \mathrm{P}_0(f_1 \dots f_\nu) \rangle$ группы $Sp(n)$. Любое инвариантное подпространство пространства $\mathrm{P}_f$ вполне приводимо, и в случае неприводимости — подобно одному из подпространств $\mathrm{P}_0(f_1 \dots f_\nu)$ пространства $\mathrm{P}_v^0$ с

$$v = f_1 + \dots + f_\nu = f \text{ или } f - 2 \text{ или } f - 4, \dots$$

Представление $\langle \mathrm{P}_0(f_1 \dots f_\nu) \rangle$ контрагредиентно самому себе, поскольку подстановка (1.11) дает возможность непосредственного перехода от ковариантных величин к контравариантным.

Мы предоставляем читателю сформулировать и доказать во всех деталях цепь предложений, подобную установленным для ортогональной группы. Использование для симплектической и ортогональной групп одинаковой системы обозначений не приведет к путанице, так как в каждом случае будет ясно, о какой из двух групп идет речь.

# ГЛАВА VII

# ХАРАКТЕРЫ

## 1. Предварительные сведения об унитарных преобразованиях

В тех случаях, когда имеет место полное разложение на абсолютно неприводимые составляющие, характеры могут служить для однозначного (в смысле эквивалентности) описания представлений. Действительно, при указанном сейчас условии характеры $\chi(s)$, $\chi'(s), \ldots$ неэквивалентных неприводимых представлений линейно независимы, и если какое-либо представление $\mathfrak{A}$ с характером $X(s)$ расщепляется на $m$ раз взятую первую неприводимую составляющую, $m'$ раз взятую вторую, ..., то мы получаем равенство

$$X(s) = m\chi(s) + m'\chi'(s) + \ldots \tag{1.1}$$

Поэтому характером $X(s)$ однозначно определяются коэффициенты $m$, $m'$, ... его разложения (1.1) по примитивным характерам $\chi, \chi'$, ...; а кратности $m$, $m'$, ... вполне описывают рассматриваемое представление $\mathfrak{A}$. На этом замечании основывается калькулятивное оперирование с представлениями с помощью их характеров. Упрощение, вызываемое такой заменой, очевидно; в частности, формальные операции $+$, $\times$, применяемые к представлениям, выражаются обычными сложением и умножением характеров. Поэтому в настоящей главе мы предпримем вычисление характеров тех представлений полной линейной, ортогональной и симплектической групп, которые были получены в предыдущих главах путем приведения тензорного пространства. Последняя процедура, несмотря на свою явно алгебраическую природу, отнюдь не доставляет простых явных формул для характеров. Для нахождения таких формул нужно обратиться к трансцендентным методам — к процессам интегрирования, распространенного на все групповое многообразие.

Разумеется, это осуществимо лишь в предположении, что основное числовое поле является *континуумом*. Мы воспользуемся континуумом $K^{\dagger}$ обыкновенных комплексных чисел. Тем не менее, наши результаты окажутся справедливыми для любого числового поля $k$ характеристики нуль по той же причине, что и раньше: они формулируемы в терминах рационального основного поля $\varkappa$, которое, в свою очередь, вкладывается в континуум K[†]. Таким образом, наше исследование дает новый пример применения анализа к чисто рациональным алгебраическим вопросам.

Интегрирование по многообразию Г возможно без каких бы то ни было усложняющих ограничений, относящихся к сходимости, лишь когда Г представляет собой, в топологическом смысле, *компактное* множество. Поэтому мы прибегаем к тому, что можно было бы назвать унитарным приемом: каждая группа заменяется *подгруппой тех ее элементов, которые являются унитарными преобразованиями.* В предыдущей главе мы с успехом применили эту идею к симплектической группе. Она же неявно содержалась и в нашем оперировании с ортогональной группой; действительно, там *унитарными* являлись *вещественные* элементы группы $O(n)$. В случае полной линейной группы мы до сих пор обходились без каких бы то ни было унитарных ухищрений, но теперь мы проиллюстрируем наш метод как раз на примере группы $GL(n)$, самой простой из всех рассматривавшихся нами групп. Успех его обязан тому обстоятельству, что *при унитарном ограничении не теряется ничего алгебраически существенного.*

Алгебраическая несущественность унитарного ограничения. Рассмотрим любую из групп

$$\Gamma = GL(n),\ O(n),\ Sp(n)$$

и произвольный полином $\varphi(A)$, зависящий от $n^2$ переменных компонент $a_{ik}$ общей $n$-строчной матрицы $A = \|a_{ik}\|$.

Лемма (VII.1.A). *Полином* $\varphi(A)$, *обращающийся в нуль для всех унитарных элементов* $A$ *из* Г, *равен нулю на всем* Г.

Элемент $A$ унитарен, если

$$\bar{A}^* A = E, \tag{1.2}$$

для *инфинитезимальных* же подстановок $S = \|s_{ik}\|$ унитарное ограничение выражается соотношениями

$$\bar{S}^* + S = 0 \quad \text{или} \quad \bar{s}_{ki} + s_{ik} = 0. \tag{1.3}$$

Если положить

$$(1.4)\qquad \begin{cases} s_{ii} = \sqrt{-1}\sigma_{ii}; \\ s_{ik} = \sigma_{ik} + \sqrt{-1}\sigma'_{ik}, \\ s_{ki} = -\sigma_{ik} + \sqrt{-1}\sigma'_{ik} \end{cases} \qquad \text{для каждой пары } i<k,$$

то (1.3) будет означать требование вещественности параметров $\sigma$. Общий инфинитезимальный элемент $S$ каждой из групп $\Gamma$ линейно зависит от некоторого числа параметров $\sigma$ и, таким образом, имеет своей областью изменения некое линейное множество $\mathfrak{g}$, инфинитезимальную группу. Надлежащим выбором базиса в $\mathfrak{g}$ можно добиться того, чтобы унитарными $S$, (1.3), были те, у которых параметры $\sigma$ имеют вещественные значения. Знакомое нам равенство

$$(1.5)\qquad A=(E-S)(E+S)^{-1}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между неисключительными элементами $A$ группы $\Gamma$ и неисключительными элементами $S$ инфинитезимальной группы; и правая и левая части этого равенства допускают унитарное ограничение (1.2), соответственно (1.3). Для завершения доказательства остается призвать на помощь следующее предложение.

Лемма (VII.1.B). *Полином* $\varphi(A)$ *равен нулю для всех элементов* $A$ *из* $\Gamma$, *если при подстановке* (1.5) *он обращается в нуль тождественно относительно параметров* $\sigma$ *инфинитезимальных элементов* $S$ (*а в случае* $\Gamma=O(n)$ — *еще при подстановке одного несобственного* $J_n$, (II.9.3)).

Для ортогональной группы эта лемма была явно доказана нами при изучении ортогонального идеала. Тем же путем проводится доказательство и для $Sp(n)$. Для группы же $GL(n)$ не требуется вообще никакого доказательства, поскольку единственное ограничивающее условие, налагаемое предположением леммы на $n^2$ аргументов $a_{ik}$ в уравнении $\varphi(A)=0$, а именно неравенство $\det(E+A)\neq 0$, сразу устраняется хорошо известным нам способом.

Если полином $\varphi(A)$ равен нулю для всех унитарных элементов $A$ из $\Gamma$, то мы имеем, в частности, численное уравнение

$$(1.6)\qquad \varphi\left(\frac{E-S}{E+S}\right)=0$$

(плюс уравнение $\varphi(J_n)=0$ при $\Gamma=O(n)$), выполняющееся для всех *вещественных* значений $\sigma$, удовлетворяющих условию

$\Delta(\sigma)=\det(E+S)\neq 0$. Но это влечет за собой, что (1.6) выполняется тождественно относительно переменных $\sigma$, и тем самым лемма (VII.1.A) получается как следствие леммы (VII.1.B).

Изощренный в алгебре читатель заметит, что наша лемма сохраняет силу в любом поле над гауссовским полем $\varkappa^\dagger=(\varkappa, \sqrt{-1})$, даже если уравнение $\varphi(A)=0$ предполагается лишь для унитарных матриц $A$ из $\Gamma$, *элементы которых лежат в* $\varkappa^\dagger$. Эта лемма эквивалентна утверждению, что обертывающие алгебры $\mathfrak{A}_f$ и $\mathfrak{A}^{(f)}$ групп подстановок $\Pi_f(A)$ и $\Pi^{(f)}(A)$, индуцируемых элементами $A$ группы $\Gamma$, не сузятся при наложении унитарного ограничения на $A$.

Поэтому части $\mathrm{P}(f_1\ldots f_n)$, на которые разлагается тензорное пространство $\mathrm{P}_f$ относительно группы $GL(n)$, останутся неприводимыми даже при сужении полной линейной группы до унитарной группы $U(n)$.

Компактность. Унитарная матрица $A=\|a_{ik}\|$ над $\mathrm{K}^\dagger$ удовлетворяет соотношениям

$$\bar{A}^*A=E,\quad A\bar{A}^*=E, \tag{1.7}$$

или

$$\sum_k \bar{a}_{ki}a_{kj}=\delta_{ij},\quad \sum_k a_{ik}\bar{a}_{jk}=\delta_{ij}. \tag{1.8}$$

Поэтому

$$\det\bar{A}\cdot\det A=1,$$

т. е. $\det A$ по абсолютной величине равен 1. Равенства

$$|a_{1i}|^2+|a_{2i}|^2+\ldots+|a_{ni}|^2=1,$$

получающиеся из (1.8) при $i=j$, показывают, что каждое $a_{kl}$ по абсолютной величине $\leqslant 1$. В силу хорошо известного принципа предельных точек Вейерштрасса это влечет за собой *компактность* унитарной группы: для каждой заданной последовательности

$$A^{(p)}\qquad (p=1, 2, \ldots)$$

унитарных матриц существует унитарная (*предельная*) матрица $A$ такая, что во всякой ее окрестности содержится по крайней мере одна из матриц

$$A^{(p)},\ A^{(p+1)},\ \ldots,$$

как бы велико ни было взято $p$.

Преобразование к главным осям. Пусть задано унитарное отображение $x \longrightarrow x' = Ax$,

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k,$$

пространства P на себя. Мы утверждаем, что в надлежащей унитарной системе координат $y$, получающейся из первоначальной системы с помощью унитарного преобразования $U$: $x = Uy$, это отображение принимает „диагональный“ вид

$$y'_i = \varepsilon_i y_i,$$

где коэффициенты $\varepsilon_i$ по абсолютной величине равны 1. Иными словами,

$$U^{-1}AU = \{\varepsilon\} \tag{1.9}$$

оказывается диагональной унитарной матрицей

$$\{\varepsilon\} = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{matrix} \right\| = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}.$$

Теорема (VII.1.C). *Любое заданное унитарное отображение $A$: $x \longrightarrow x'$ в надлежащих унитарных координатах $x_i$ принимает диагональный вид*

$$x'_i = \varepsilon_i x_i \quad (|\varepsilon_i| = 1).$$

*Или: в унитарной группе каждый элемент $A$ сопряжен с каким-нибудь диагональным элементом* $\{\varepsilon\}$.

Доказательство. Выберем в качестве $\lambda = \varepsilon$ корень характеристического уравнения

$$|\lambda E - A| = 0.$$

Тогда существует ненулевой вектор $x = e$ такой, что

$$\varepsilon e = Ae.$$

Путем классического индуктивного построения можно определить унитарную систему координат $e_1, e_2, \dots, e_n$, первый фундаментальный вектор которой, с точностью до положительного численного множителя, совпадает с $e$. Имеем тогда

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \varepsilon e_1, \\ Ae_2 &= \alpha_{12}e_1 + \ldots + \alpha_{n2}e_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Ae_n &= \alpha_{1n}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n; \end{aligned}$$

т. е. в новой системе координат $e_1, \ldots, e_n$ матрица $\|\alpha_{ik}\|$ отображения $A$ имеет в качестве первого столбца

$$(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}) = (\varepsilon, 0, \ldots, 0).$$

Сумма квадратов абсолютных величин его членов должна равняться 1; поэтому $|\varepsilon| = 1$. Но в то же время и сумма квадратов абсолютных величин членов первой строки должна быть равна 1:

$$|\varepsilon|^2 + |\alpha_{12}|^2 + \ldots + |\alpha_{1n}|^2 = 1.$$

Отсюда

$$|\alpha_{12}|^2 + \ldots + |\alpha_{1n}|^2 = 0,$$

т. е.

$$\alpha_{12} = \ldots = \alpha_{1n} = 0,$$

и, следовательно, наша матрица разлагается по схеме

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Матрица $\|\alpha_{ik}\|$, где $i$ и $k$ пробегают значения от 2 до $n$, является $(n-1)$-мерной унитарной матрицей. Тем самым наше предложение об $n$-мерных унитарных матрицах сведено к соответствующей теореме для $n-1$ измерений.

Элементы $\varepsilon_i$ диагональной матрицы $\{\varepsilon\}$, очевидно, являются корнями характеристического уравнения

$$\det(\lambda E - A) = \det(\lambda E - \{\varepsilon\}) = 0,$$

и тем самым, с точностью до порядка нумерации, однозначно определяются матрицей $A$. Порядок остается действительно произвольным, т. е. две диагональные матрицы

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \text{ и } \{\varepsilon'\} = \{\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n'\}$$

сопряжены, если (и только если) $\varepsilon'_i$ получаются из $\varepsilon_i$ путем перестановки. Полагая

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i \varphi_k} = e(\varphi_k),$$

мы вводим $n$ вещественных „углов“ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ отображения $A$. При этом угол следует брать по модулю 1, т. е. $\varphi \pm 1$, $\varphi \pm 2, \ldots$ означают тот же угол, что и $\varphi$.

Теорему (VII.1.C), относящуюся к одной унитарной матрице, можно распространить на любое множество $\mathfrak{A} = \{A\}$ перестановочных друг с другом унитарных матриц (коммутативное множество):

Теорема (VII.1.D). *Все унитарные преобразования из заданного коммутативного множества можно выбором надлежащей унитарной системы координат одновременно привести к диагональному виду.*

Разбивая „собственные значения“ или корни $\varepsilon_i$ унитарного отображения $A$ на группы равных, мы можем сформулировать предложение (VII.1.C) следующим образом: $\mathrm{P}$ разложимо на взаимно перпендикулярные подпространства $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \ldots$ так, что 1) каждое $\mathrm{P}_\varkappa$ инвариантно относительно $A$ и 2) операция $A$ является в $\mathrm{P}_\varkappa$ простым умножением всех векторов на некоторое число $a_\varkappa$, причем эти множители $a_\varkappa$ различны для различных $\mathrm{P}_\varkappa$ и в $\mathrm{P}_\varkappa$ содержится *каждый* вектор $\mathfrak{x}$, для которого

$$A\mathfrak{x} = a_\varkappa \mathfrak{x}. \tag{1.10}$$

Пусть $B$ — произвольный (унитарный) оператор, перестановочный с $A$; я утверждаю, что пространства $\mathrm{P}_\varkappa$ инвариантны также относительно $B$. Действительно, если $\mathfrak{x}$ принадлежит пространству $\mathrm{P}_\varkappa$, т. е. удовлетворяет соотношению (1.10), то это же имеет место и для $B\mathfrak{x}$:

$$A(B\mathfrak{x}) = B(A\mathfrak{x}) = a_\varkappa \cdot B\mathfrak{x}.$$

Это замечание дает возможность перенести наше предложение на любое коммутативное множество $\mathfrak{A}$ унитарных операторов $A$; другими словами, $\mathrm{P}$ разложимо на перпендикулярные подпространства $\mathrm{P}_\varkappa$, 1) инвариантные относительно $\mathfrak{A}$ и 2) такие, что каждый оператор $A$ из $\mathfrak{A}$ сводится в $\mathrm{P}_\varkappa$ к умножению. Действительно, пусть $\mathrm{P}$ разложено на инвариантные подпространства $\mathrm{P}_\varkappa$, причем, однако, один по крайней мере оператор $A^0$ из $\mathfrak{A}$ в одном из этих подпространств, например, в $\mathrm{P}_1$, не сводится к умножению. $A^0$ является в $\mathrm{P}_1$ унитарным оператором, и потому $\mathrm{P}_1$ можно расщепить на взаимно перпендикулярные подпространства $P'_1 + P''_1 + \ldots$ так, что они будут инвариантны относительно $A^0$, причем в каждом из них $A^0$ будет уже простым умножением (на различные числа $a'_1, a''_1, \ldots$). Тогда, согласно нашему замечанию, которое надо теперь применить вместо $P$ к $P_1$, составляющие $P'_1, P''_1, \ldots$ инвариантны относительно всех операторов $A$ из $\mathfrak{A}$, поскольку последние перестановочны с $A^0$. Так как оператор $A^0$ не является в $P_1$ умножением, то число слагаемых в разложении

$$P_1 = P'_1 + P''_1 + \ldots,$$

самое меньшее, равно 2. Тем самым наше разбиение пространства $P$ на инвариантные подпространства подверглось дальнейшему дроблению — процесс, который необходимо должен остановиться, самое большее, через $n$ шагов.

## 2. Характер только для симметризации или только для альтернирования

Многообразие $\Sigma(f)$ всех симметричных тензоров ранга $f$ является полем действия некоторого представления

$$\langle\Sigma(f)\rangle: \quad A \longrightarrow (A)_f$$

полной линейной группы, которое может быть определено следующим образом. В то время как координаты $x_i$ в нашем основном $n$-мерном векторном пространстве $P$ подвергаются линейному преобразованию

$$(2.1) \qquad A = \|a_{ik}\|: \quad x'_i = \sum_k a_{ik} x_k,$$

все составленные из них одночлены степени $f$,

$$(2.2) \qquad x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} \quad (r_1 + \ldots + r_n = f),$$

подвергаются соответствующему линейному преобразованию $(A)_f$. Вычисление характера этого представления $\langle\Sigma(f)\rangle$ будет хорошей подготовкой к стоящим перед нами более трудным задачам аналогичной природы.

Можно сказать, что полем действия представления $\langle\Sigma(f)\rangle$ служит линейное многообразие всех форм степени $f$ от наших переменных $x_i$. Эта формулировка сразу обнаруживает, что выбор системы координат в $P$ несуществен для определения этого характера. Действительно, замена координат $x_i$ в $P$

вызывает просто замену („одночленного“) базиса (2.2) для форм степени $f$, а известно, что след линейной подстановки не меняется при замене базиса.

Согласно общему плану нашего исследования, сперва ограничимся рассмотрением унитарных матриц $A$. Каждую такую матрицу $A$ мы вправе считать заданной в ее нормальной форме $\{\varepsilon\}$. Под действием $A$ каждый одночлен (2.2) умножается на

$$\varepsilon_1^{r_1} \ldots \varepsilon_n^{r_n},$$

т. е. соответствующее преобразование $(A)_f$ также имеет диагональный вид, и след этой подстановки, т. е. характер $\psi_f(A)$, задается суммой

$$\sum \varepsilon_1^{r_1} \ldots \varepsilon_n^{r_n}, \tag{2.3}$$

распространенной на все неотрицательные целые $r_1, \ldots, r_n$, образующие в сумме $f$. Как показывает формула

$$\frac{1}{1-\varepsilon z} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r z^r,$$

(2.3) есть коэффициент при $z^f$ в разложении дроби

$$\frac{1}{(1-\varepsilon_1 z) \ldots (1-\varepsilon_n z)} \tag{2.4}$$

в ряд Тэйлора. Это разложение можно рассматривать либо как формальный ряд, либо как численное равенство, выполняющееся для комплексного переменного $z$ в области сходимости $|z| < 1$. Знаменателем в (2.4) служит характеристический полином

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \det(E - zA) = \\ &= q_0 - q_1 z + q_2 z^2 - \ldots \pm q_n z^n \qquad (q_0 = 1), \end{aligned} \tag{2.5}$$

и это замечание сразу позволяет вернуться от нормальной формы $\{\varepsilon\}$, принимаемой нашим унитарным $A$ в *приуроченной к нему* системе координат, к его матрице $A$ в исходной системе координат, общей для всех элементов $A$ из $U(n)$.

В соответствии со сказанным мы вводим для любой линейной подстановки $A = \|a_{ik}\|$ функции $p_f(A)$ посредством формального разложения

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{|E - zA|} = \sum_{f=0}^{\infty} p_f z^f. \tag{2.6}$$

Это означает, что для каждого $l \geqslant 0$ мы будем иметь сравнение

$$(1-q_1 z+\ldots \pm q_n z^n)(p_0+p_1 z+\ldots+p_l z^l) \equiv 1 \pmod{z^{l+1}},$$

а это позволяет рекуррентно определять коэффициенты $p_l$ один за другим:

$$p_0=1, \quad p_l-q_1 p_{l-1}+\ldots \pm q_n p_{l-n}=0 \qquad (l=1, 2, \ldots).$$

$p$ с отрицательными индексами, $p_{-1}$, $p_{-2}$, ..., считаются здесь равными нулю. Из этого рекуррентного определения следует, что $p_l(A)$ есть однородный полином степени $l$ от величин $a_{ik}$.

Формула

$$\psi_f(A)=p_f(A) \tag{2.7}$$

пока доказана только для унитарных преобразований $A$. Однако, согласно их определению, обе части равенства (2.7) являются полиномами от переменных элементов $a_{ik}$ матрицы $A$; следовательно, по лемме (VII.1.A) это равенство распространяется на все элементы $A$ из $GL(n)$.

Метод, которому мы здесь следовали, послужит образцом в будущих более сложных случаях. Но благодаря простоте результата естественно задаться вопросом: нельзя ли получить формулу (2.7) без обхода через унитарные подстановки и их иррациональную нормальную форму $\{\varepsilon\}$, зависящую от решения характеристического уравнения? Обойтись без первого шага, действительно, довольно легко. Решая характеристическое уравнение для произвольного отображения $A$, можно привести его матрицу к рекуррентной или треугольной форме

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & * & \ldots & * \\ 0 & a_2 & \ldots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{matrix} \right\|.$$

Тогда $(A)_f$ принимает такой же вид, и след его оказывается равным

$$\sum a_1^{r_1} \ldots a_n^{r_n} \qquad (r_1+\ldots+r_n=f).$$

Обойтись без приведения $A$ к удобной нормальной форме представляется несколько менее легким делом. Я изложу аналитический способ, отвечающий нашему теперешнему требованию использования подстановки $A$ в ее первоначальной форме (2.1).

Коэффициент $(r;\ \rho)$ линейного преобразования $(A)_f$:

$$x_1'^{r_1} \ldots x_n'^{r_n} = \sum_{\rho} (r;\ \rho)\, x_1^{\rho_1} \ldots x_n^{\rho_n}$$

может быть вычислен как интеграл

$$(r;\ \rho) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int \frac{x_1'^{r_1} \ldots x_n'^{r_n}}{x_1^{1+\rho_1} \ldots x_n^{1+\rho_n}}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где каждая интеграция производится по единичной окружности $|x_k| = 1$ в комплексной плоскости $x_k$. Поэтому применение того же процесса интеграции к разложению

$$\frac{1}{\prod\limits_{k} (x_k - zx_k')} = \frac{1}{x_1 \ldots x_n} \sum \left(\frac{x_1'}{x_1}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{x_n'}{x_n}\right)^{r_n} z^f$$

$$(r_1 + \ldots + r_n = f),$$

содержащему вспомогательную переменную $z$, приводит к формуле

$$(2.8) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{(x_1 - zx_1') \ldots (x_n - zx_n')} = \sum_{f=0}^{\infty} \psi_f(A)\, z^f.$$

Когда переменные $x_k$ остаются соответственно на окружностях $|x_k| = 1$, выражения

$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k$$

не могут по абсолютной величине превзойти некоторой границы $M$ — наибольшего из $n$ чисел

$$|a_{i1}| + \ldots + |a_{in}| \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n).$$

Сходимость в (2.8) обеспечена при $|z| < \frac{1}{M}$.

Мы установим выполнение в этом круге требуемого равенства

$$(2.9) \qquad \sum_{f=0}^{\infty} \psi_f(A)\, z^f = \frac{1}{|E - zA|},$$

доказав следующую лемму:

Лемма (VII.2.A). *Если*

$$A = \|a_{ik}\|: \quad y_i = \sum a_{ik} x_k$$

— *линейная подстановка, удовлетворяющая неравенствам*

$$(2.10) \qquad \begin{cases} +|a_{11}| - |a_{12}| - \ldots - |a_{1n}| > 0, \\ -|a_{21}| + |a_{22}| - \ldots - |a_{2n}| > 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -|a_{n1}| - |a_{n2}| - \ldots + |a_{nn}| > 0, \end{cases}$$

*то ее определитель* $\det A \neq 0$ *и*

$$(2.11) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{y_1 \ldots y_n} = \frac{1}{\det A},$$

*где интеграции производятся по единичным окружностям* $|x_k| = 1$.

Мы проведем доказательство индукцией по размерности $n$ и сделаем сперва несколько неопределенное предположение, что $A$ достаточно близка к единичной матрице. Рассмотрим $\frac{1}{y_1 \ldots y_n}$ как функцию от переменной $x_1$ при фиксированных значениях $x_2, \ldots, x_n$ на их окружностях $|x_k| = 1$. При нашем предположении полюс

$$(2.12) \qquad x_1 = -\frac{1}{a_{11}} (a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n),$$

вызываемый приравниванием $y_1$ нулю, будет мал, тогда как другие $n-1$ полюсов, обращающие в нуль $y_2, \ldots, y_n$, будут велики. Поэтому лишь первый из этих полюсов лежит в единичном круге, и интегральная формула Коши дает:

$$(2.13) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dx_1}{y_1 \ldots y_n} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{1}{y'_2 \ldots y'_n},$$

где

$$y'_i = \sum a'_{ik} x_k \qquad (i, k = 2, \ldots, n)$$

суть линейные формы, получающиеся из $y_2, \ldots, y_n$ при подстановке вместо $x_1$ значения (2.12) или при вычитании из $y_2, \ldots, y_n$ кратных $\frac{a_{21}}{a_{11}}, \ldots, \frac{a_{n1}}{a_{11}}$ от $y_1$, обращающих в нуль коэффициенты при $x_1$. Это вычитание не изменяет определителя $\det A$ форм $y_1, \ldots, y_n$; поэтому

$$(2.14) \qquad \det A = a_{11} \cdot \det A'.$$

Заметим, что преобразование (2.15)

$$\mathrm{A}' = \|\alpha'_{ik}\| \qquad (i, k = 2, \ldots, n$$

снова близко к тождественному. Сравнение равенства (2.14 с результатом интегрирования соотношения (2.13)

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{y_1 \ldots y_n} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int \ldots \int \frac{dx_2 \ldots dx_n}{y'_2 \ldots y'_n}$$

и дает индуктивное доказательство равенства (2.11).

Простое вычисление показывает, что неравенства (2.10) влекут за собой: 1) требуемое положение $x_1$-корней форм $y_1 \mid y_2, \ldots, y_n$, а именно, соответственно внутри или вне единичного круга, в предположении, что $x_2, \ldots, x_n$ лежат на единичной окружности, и 2) такие же неравенства для $\mathrm{A}'$. Поэтому мы можем утверждать справедливость формулы (2.11) и при более точных предположениях нашей леммы [1].

Определив, таким образом, различными способами характер представления $\langle\Sigma(f)\rangle$, сделаем следующий шаг по направлению к нашей окончательной цели, разбивая $f$ аргументов тензора ранга $f$ на несколько рядов длиною в $f_1, f_2, \ldots, f_r$, соответственно данной диаграмме симметрии $(f_1 + f_2 + \ldots + f_r = f)$, и рассматривая все тензоры, симметричные относительно аргументов каждого ряда. Они образуют инвариантное многообразие $\Sigma(f_1 \ldots f_r)$ с соответствующим ему представлением $\langle\Sigma(f_1 \ldots f_r)\rangle$ группы $GL(n)$. Так как преобразование $A$ представляется кронекеровским произведением

$$(A)_{f_1} \times (A)_{f_2} \times \ldots \times (A)_{f_r},$$

то его характер задается формулой

$$\phi(f_1 \ldots f_r) = p_{f_1}(A)\, p_{f_2}(A) \ldots p_{f_r}(A). \tag{2.16}$$

Тем самым нами решена задача определения характеров, когда диаграмма $T(f_1 f_2 \ldots)$ используется как базис для *симметризации*

$$a = \sum p$$

(ср. § 2 главы IV). Соответствующая задача для *альтернирования*

$$b = \sum \delta_q q$$

даже еще проще. Если сперва снова ограничиться унитарными преобразованиями и рассматривать $A$ в его нормальной форме

$\{\varepsilon\}$, то антисимметричные тензоры ранга $f$ будут образовывать поле действия представления, характер которого равен $f$-той элементарной симметрической функции от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, или коэффициенту $q_f$ характеристического полинома (2.5). Тот же результат может быть получен абсолютно элементарным путем. Действительно, сразу видно, что след подстановки, которой подвергаются косо-симметричные тензоры под влиянием преобразования $A$, равен

$$\sum_{(i_1<i_2<\ldots<i_f)} \left\| \begin{matrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_f} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_f} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_f i_1} & a_{i_f i_2} & \ldots & a_{i_f i_f} \end{matrix} \right\| = q_f(A).$$

Если столбцы диаграммы имеют длины $f_1^*, f_2^*, \ldots$, то тензоры, антисимметричные относительно аргументов каждого столбца, образуют поле действия представления, характер которого равен

$$q_{f_1^*} q_{f_2^*} \ldots \tag{2.17}$$

Однако действительной задачей является определение характера в том случае, когда применяются последовательно оба процесса: симметризация относительно строк и альтернирование относительно столбцов. К этой задаче мы подойдем теперь, пользуясь существенно более трансцендентным методом: совершенно независимо от всех предшествующих рассмотрений мы попытаемся вычислить характеры, соответствующие всем неприводимым непрерывным представлениям унитарной группы.

## 3. Усреднение по группе

Процесс *усреднения по всем групповым элементам* $s$ является мощным инструментом изучения конечной группы $\gamma$, доставляющим неожиданно сильные результаты. Мы уже встретились с этим методом в главе III, где вывели с его помощью существование производящих идемпотентов и полную приводимость регулярного, а потому и любого представления конечной группы. Чтобы освоиться с этим процессом, приведем и некоторые другие примеры.

Пусть в $n$-мерном аффинном точечном пространстве задана конечная группа $\gamma$ аффинных преобразований $s$. *Я утверждаю, что существует точка, лево-инвариантная относительно* *каждого из преобразований этой группы.* Если $P$ — центр тяжести некоторых положительных масс $\mu_1, \ldots, \mu_h$, расположенных в точках $P_1, \ldots, P_h$, а $s$ — любое аффинное преобразование, то $sP$ будет центром тяжести тех же масс в точках $sP_1, \ldots, sP_h$. Возьмем теперь произвольную точку $P$ и образуем центр тяжести $P_0$ $h$ эквивалентных точек $sP$, получающихся из $P$ с помощью $h$ преобразований $s$ заданной группы, приписывая каждой из этих точек одну и ту же массу или вес 1:

$$P_0 = \frac{1}{h} \sum_s sP.$$

$P_0$ *обладает требуемым свойством.* Действительно, для произвольного преобразования $a$ из нашей группы имеем:

$$aP_0 = \frac{1}{h} \sum_s asP = \frac{1}{h} \sum s'P,$$

где

$$s' = as.$$

Но $s'$ вместе с $s$ пробегает все групповые элементы; следовательно, $\frac{1}{h} \sum s'P$ снова равно $P_0$.

Другой важный пример, более близкий к нашим теперешним интересам, относится к *инвариантам* $F(x, y, \ldots)$ заданной абстрактной конечной группы $\gamma$, где аргументы $x, y, \ldots$ суть общие векторы пространств нескольких заданных представлений группы $\gamma$ (см. § 5 главы I). Пусть $F$ — любой полином от таких векторов, однородный относительно компонент каждого из этих векторов. Образуем снова среднее

$$[F] = \frac{1}{h} \sum_s sF \tag{3.1}$$

по группе $\gamma$. *Тогда* $[F]$ *будет инвариантом.* Этот процесс усреднения [ ], переводящий каждый полином в инвариант, во-первых, является *линейным* процессом и, во-вторых, оставляет $F$ неизменным, если $F$ сам есть инвариант. Кроме того, если $J$ — инвариант, то имеем:

$$[JF] = J[F]. \tag{3.2}$$

Мы увидим (глава VIII, § 14), что этот процесс доставляет простое доказательство первой основной теоремы теории инвариантов для случая конечных групп.

В качестве третьего примера я докажу следующее предложение:

Теорема (VII.3.A). *Каждая конечная группа однородных линейных преобразований оставляет инвариантной некоторую положительно определенную эрмитову форму.*

Доказательство. Эрмитова форма

$$G(x) = \sum g_{ik} \bar{x}_i x_k \qquad (g_{ki} = \bar{g}_{ik})$$

называется положительно определенной, если $G(x) > 0$, за исключением того случая, когда $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Начнем с произвольной такой формы $G$, например, с единичной формы

$$\bar{x}_1 x_1 + \ldots + \bar{x}_n x_n. \tag{3.3}$$

Среднее

$$G_0 = \frac{1}{h} \sum_s sG$$

будет удовлетворять нашим требованиям.

Каждую положительно определенную эрмитову форму $G(x)$ можно надлежащим выбором координат превратить в единичную форму. Это достигается классическим индуктивным построением унитарной системы координат, если принять

$$G(x, y) = \sum g_{ik} \bar{x}_i y_k$$

за скалярное произведение в нашей унитарной геометрии. Применяя это замечание к $G_0$, получаем важное

Следствие (VII.3.B). *Любая конечная группа однородных линейных преобразований эквивалентна группе унитарных преобразований.*

Отсюда, в силу леммы (VI.2.A), заново следует полная приводимость представлений конечных групп. Этот, хотя и очень быстрый, путь установления указанной фундаментальной истины имеет свои невыгоды по сравнению с нашим первоначальным способом, принятым в главе III. А именно, в то время как последний проходит в любом числовом поле, данное здесь доказательство оперирует в обыкновенном поле всех комплексных чисел. Даже в лучшем случае область его применения не может выйти за пределы полей типа $k^{\dagger} = (k, \sqrt{-1})$, где $k$ вещественно.

Этих примеров уже достаточно. Но чтó мы на самом деле имеем в виду, — это применить процесс усреднения не к конечной, а к *компактной непрерывной группе*. Пусть дана непрерывная группа $\gamma$, т. е. группа, элементы $s$ которой образуют, в топологическом смысле, непрерывное многообразие. При этом мы, естественно, предполагаем, что композиция $st$ двух элементов $s$ и $t$ *непрерывно* зависит от совокупности обоих аргументов $s$, $t$ и что $s^{-1}$ есть непрерывная функция от $s$. Будем, сверх того, предполагать, что к нашему групповому многообразию можно применить дифференциально-геометрическое понятие *линейных элементов*; в этом случае речь идет о *группе Ли*. До сих пор никому еще не удалось установить естественным и удовлетворительным способом внутренние требования, которым должно отвечать многообразие для того, чтобы оно допускало применение идеи линейных элементов и тем самым исчисления бесконечно малых („дифференцируемое многообразие"). Однако для всех практических целей достаточно следующего. Каждой точке многообразия соответствует класс допустимых систем координат $(s_1, \ldots, s_r)$; функции, выражающие преобразование одной допустимой системы координат в другую, не только непрерывны, но обладают также непрерывными первыми производными и неравным нулю функциональным определителем (в некоторой окрестности данной точки). Этим способом многообразию сразу приписывается определенная размерность $r$. „Параметры" $s_i$ предполагаются вещественными числами. Более тщательную формулировку читатель найдет в книжке Veblen and Whitehead, The Foundations of Differential Geometry, Cambridge Tracts, № 29, 1932. В случае группы эти требования нужно выставить лишь для точки 1, так как посредством „левого сдвига" $a$:

$$s \longrightarrow s' = as \tag{3.4}$$

окрестность точки 1 переводится в окрестность произвольной, наперед заданной точки $a$. Разумеется, мы должны теперь принять, что для любых двух элементов $s$ и $t$ достаточно малой окрестности точки 1 параметры произведения $st$ являются функциями от параметров сомножителей $s$ и $t$ с непрерывными первыми производными.

Линейные элементы $\delta s = (\delta s_1, \ldots, \delta s_r)$ в единичной точке 1 являются инфинитезимальными элементами группы; они образуют $r$-мерную касательную гиперплоскость к групповому многообразию в точке 1. $r$ таких линейных элементов $\delta' s, \ldots, \delta^{(r)} s$ в точке 1 определяют инфинитезимальный элементарный параллелепипед; в качестве его объема следует рассматривать абсолютное значение определителя

$$\begin{vmatrix} \delta' s_1 \dots \delta' s_r \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \delta^{(r)} s_1 \dots \delta^{(r)} s_r \end{vmatrix}.$$

При изменении системы параметров $s_1, \dots, s_r$, покрывающих окрестность точки 1, все эти объемы умножаются на одну и ту же положительную постоянную. Таким образом, они, с точностью до выбора единицы, не зависят от системы параметров.

Процесс усреднения по компактной группе Ли предполагает, что мы умеем сравнивать элементы объема в *различных точках* группового многообразия. Мы должны найти аналог равным весам, приписывавшимся различным групповым элементам в случае конечной группы. Наши примеры сразу обнаруживают необходимое условие, которому должна удовлетворять такая „хорошая" мера объема: она должна быть инвариантна относительно всех левых сдвигов (3.4). Но по определении объема для элементов в точке 1 этого требования уже вполне достаточно для перенесения меры из центрального бюро стандартов при точке 1 в любую другую точку: перенос осуществляется посредством *левого сдвига*. Элемент объема $d\omega_a$ в $a$, получающийся из элемента объема $d\omega$ в 1 посредством левого сдвига $a$, будет по определению иметь ту же меру, что и $d\omega$. Линейный элемент $ds$ в $s$ ведет от $s$ к бесконечно близкой точке $s+ds$; посредством левого сдвига $s^{-1}$ он переходит в линейный элемент $\delta s$ в 1, определяемый формулой

$$1+\delta s = s^{-1}(s+ds). \tag{3.5}$$

Согласно нашему определению, эти $\delta s$ и используются для вычисления объема инфинитезимального параллелепипеда $d\omega_s$ в $s$ (как абсолютного значения определителя компонент $r$ таких $\delta s$, соответствующих $r$ линейным элементам $ds$ в $s$, определяющим $d\omega_s$).

Пользуясь так определенной мерой объема, мы можем усреднить любую непрерывную функцию на компактной группе Ли $\gamma$ по всей группе [2]. При желании можно выбрать находящуюся в нашем распоряжении единицу измерения объемов так, чтобы сделать объем всей группы равным единице. Теперь мы в состоянии перенести с конечных на компактные группы Ли все примеры, рассмотренные в этом параграфе. В частности, любое непрерывное представление такой группы оставляет инвариантной некоторую положительно определенную эрмитову форму и потому эквивалентно унитарному представлению. В ее унитарном нормальном виде представляющая матрица $U(s) = \|u_{ik}(s)\|$ удовлетворяет уравнениям

$$u_{ki}(s^{-1}) = \hat{u}_{ik}(s) = \bar{u}_{ik}(s),$$

и, следовательно, для характера $\chi(s)$ мы при всех обстоятельствах имеем

$$\chi(s^{-1}) = \bar{\chi}(s).$$

Любое представление разлагается на неприводимые представления.

Равным образом проходит и доказательство соотношений ортогональности, принадлежащее И. Шуру [8] (глава IV, § 1). В частности, для примитивных характеров мы получаем соотношения ортогональности

$$\mathfrak{M}_s\{\bar{\chi}(s)\,\chi'(s)\} = 1 \text{ или } 0,$$

смотря по тому, эквивалентны или нет два неприводимых представления с характерами $\chi$ и $\chi'$. Поэтому кратности $m$, $m'$, ... в разложении произвольного характера $\mathrm{X}(s)$, равенство (1.1), могут быть определены как средние значения

(3.6) $$m = \mathfrak{M}_s\{\mathrm{X}(s)\,\bar{\chi}(s)\}, \ldots$$

Кроме того, имеем:

(3.7) $$\mathfrak{M}_s\{\mathrm{X}(s)\,\bar{\mathrm{X}}(s)\} = m^2 + m'^2 + \ldots$$

Это показывает, что *представление с характером* $\mathrm{X}(s)$ *неприводимо в том и только в том случае, когда* $|\mathrm{X}(s)|^2$ *имеет среднее значение* 1, — признак, часто применявшийся Фробениусом.

*Соотношение полноты* для полной системы неэквивалентных неприводимых представлений компактной группы Ли было установлено Ф. Петером и автором этой книги; построение, известное для конечной группы, пришлось в процессе приспособления к компактным непрерывным группам несколько усложнить. [4]

Кое-где нам сильно мешало бы, если бы мера объема не была инвариантной относительно не только левых, но и правых сдвигов, т. е. относительно операций

$$s \to s' = sa.$$

Элемент объема $d\omega$, заданный в точке 1, переносится с помощью левого сдвига $a$ в точку $a$, затем с помощью правого сдвига $a^{-1}$ — обратно в точку 1. Спрашивается, сохраняет ли получающаяся в итоге операция „сопряжения“ $a$:

$$s' = asa^{-1}, \tag{3.8}$$

неизменным объем $d\omega$? Отнесение групповым элементам $a$ операции (3.8) устанавливает реализацию группы, так называемую *присоединенную реализацию*, полем действия которой служит само групповое многообразие. Операция (3.8), оставляя точку 1 неподвижной, переводит инфинитезимальный групповой элемент $1+\delta s$ в инфинитезимальный элемент $1+\delta' s$, и переход от линейного элемента $\delta s$ к $\delta' s$, естественно, является некоторым линейным преобразованием $K(a)$; соответствие $a \longrightarrow K(a)$ есть *присоединенное представление*. Мы поставили вопрос, является ли это представление квази-унимодулярным, т. е. будет ли

$$|\det K(a)| = 1$$

для всех элементов $a$. Этот вопрос решается утвердительно в силу следующей общей леммы:

Лемма (VII.3.C). *Непрерывное представление компактной группы необходимо квази-унимодулярно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a$ компактной группы $\gamma$ и его представителя $T(a)$. Предположим, что

$$|\det T(a)| > 1.$$

Последовательность $a^n$ $(n=1, 2, \ldots)$ имеет в групповом многообразии предельную точку $b$. Вследствие равенства

$$T(a^n) = (T(a))^n,$$

$|\det T(a^n)|$ при $n \longrightarrow \infty$ стремится к $\infty$. Но это противоречит тому факту, что для некоторых произвольно больших номеров $n$ число $|\det T(a^n)|$ должно быть сколь угодно близко к значению $|\det T(b)|$. Таким же способом отвергается и возможность $|\det T(a)| < 1$ путем рассмотрения последовательности $a^{-n}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Подстановка

$$s' = s^{-1}$$

превращает линейный элемент $\delta s$, заданный в точке 1, в $-\delta s$ и, следовательно, оставляет неизменным объем любого инфинитезимального параллелепипеда в точке 1. То же остается верным и для элемента объема в любой точке $a$. Действительно, когда $s$ подвергается левому сдвигу $a$: $s \to as$, обратный элемент $s^{-1}$ претерпевает правый сдвиг $a^{-1}$:

$$s^{-1} \to s^{-1}a^{-1}.$$

Тем самым наше утверждение является непосредственным следствием того факта, что объем инвариантен относительно как левых, так и правых сдвигов.

В случае группы линейных преобразований или матриц, инфинитезимальные элементы группы образуют $r$-мерную линейную совокупность матриц

$$\delta A = \delta s_1 \cdot K_1 + \ldots + \delta s_r \cdot K_r,$$

где $K_1, \ldots, K_r$ — произвольно выбранный ее базис. Если $A$ и $A + dA$ — две бесконечно близкие матрицы из рассматриваемой группы, то $\delta A = A^{-1} \cdot dA$ есть инфинитезимальный элемент, определенный формулой (3.5), и потому компоненты $\delta s_i$, вводимые формулой

$$A^{-1} \cdot dA = \delta s_1 \cdot K_1 + \ldots + \delta s_r \cdot K_r, \tag{3.9}$$

служат для вычисления объема бесконечно малого параллелепипеда в $A$, натянутого на $r$ линейных элементов $dA$.

Группа $U(n)$ всех унитарных преобразований есть $n^2$-параметрическая компактная группа Ли. Инфинитезимальная унитарная матрица $\delta A = \|\delta a_{ik}\|$ удовлетворяет условиям

$$\delta a_{ki} = -\overline{\delta a_{ik}},$$

и $n^2$ ее вещественных параметров $\delta s$ можно ввести с помощью подстановки (1.4):

$$\delta a_{ii} = \sqrt{-1}\,\delta s_{ii} \qquad (\text{для каждого } i = 1, \ldots, n);$$

$$\delta a_{ik} = \delta s_{ik} + \sqrt{-1}\,\delta s'_{ik}, \quad \delta a_{ki} = -\delta s_{ik} + \sqrt{-1}\,\delta s'_{ik}$$

$$(\text{для каждой пары } i, k \text{ с } i < k).$$

Это сразу показывает, что для вычисления объема объемного элемента комплексные параметры $\delta a_{ik}$ могут служить так же хорошо, как и вещественные параметры $\delta s_{ik}$.

Утверждение, что присоединенное представление квази-унимодулярно, выведенное выше путем простого топологического рассмотрения для любой абстрактной компактной группы Ли, в случае групп Ли унитарных линейных преобразований допускает алгебраическое доказательство.

**Лемма** (VII.3.D). *Пусть $U$ — унитарная матрица и $\mathfrak{K}$ — $r$-мерное линейное многообразие матриц*

$$K = \lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_r K_r, \tag{3.10}$$

*инвариантное относительно преобразования*

$$K \to K' = UKU^{-1}: \tag{3.11}$$

$$UK_\alpha U^{-1} = \sum_\beta c_{\beta\alpha} K_\beta \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \ldots, r).$$

*Тогда это линейное преобразование $\|c_{\alpha\beta}\|$ оставляет инвариантной некоторую положительно определенную эрмитову форму.* (*Поэтому при надлежащем выборе базиса $K_\alpha$ в $\mathfrak{K}$ матрица $\|c_{\alpha\beta}\|$ становится унитарной и ее определитель необходимо равен по абсолютной величине единице.*)

Каждая матрица $A = \|a_{ik}\|$ имеет *„норму“*

$$n(A) = \operatorname{tr}(\bar{A}^* A) = \sum_{i,k} |a_{ik}|^2,$$

положительную для всех $A$, за исключением $A = 0$. Эта норма не изменяется при замене $A$ на $B = UAU^{-1}$, где $U$ унитарна:

$$\bar{U}^* = U^{-1}, \quad \bar{B}^* B = \bar{U}^{*-1} \bar{A}^* \bar{U}^* UAU^{-1} = U(\bar{A}^* A) U^{-1}.$$

Следовательно, выражение

$$n(K) = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} \bar{\lambda}_\alpha \lambda_\beta$$

для общей матрицы $K$, (3.10), является положительно определенной эрмитовой формой от параметров $\lambda$, инвариантной относительно подстановки (3.11):

$$\lambda'_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} \lambda_\beta.$$

Простейшей компактной группой является *группа вращений плоскости* (или, что то же, — одномерная унитарная группа). Это коммутативная однопараметрическая группа. Очевидно,

$$\varphi \to e^{2\pi i m\varphi} = e(m\varphi),$$

где $\varphi$ — угол вращения, для любого целого $m$ есть унитарное представление первой степени. Я утверждаю, что это — единственные неприводимые непрерывные представления, и потому

$$\chi(\varphi) = e(m\varphi) \tag{3.12}$$

— единственные примитивные характеры. Мы получаем здесь весьма естественный подход к теории рядов Фурье. В частности, равенство Парсеваля

$$\int_0^1 |f(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \left| \int_0^1 f(\varphi)\, e(-m\varphi)\, d\varphi \right|^2,$$

выполняющееся для любой непрерывной функции $f(\varphi)$ с периодом 1, оказывается частным случаем теоретико-группового соотношения полноты. Для доказательства нашего утверждения заметим сперва, что всякое представление эквивалентно некоторому унитарному. Вследствие коммутативности нашей группы и теоремы (VII.1.D), унитарное представление разбивается на части первой степени. Поэтому требуется лишь найти непрерывные решения $\chi(\varphi)$ следующих функциональных уравнений:

$$\chi(\varphi+\varphi') = \chi(\varphi)\chi(\varphi'), \qquad |\chi(\varphi)| = 1. \tag{3.13}$$

Имея такую функцию $\chi$, введем посредством формулы

$$\chi(\varphi) = e(g(\varphi))$$

вещественную функцию $g(\varphi)$; она однозначно определена лишь по mod 1, но будет однозначно определенной уже в абсолютном смысле, если мы потребуем, чтобы $g(0)=0$ и чтобы $g(\varphi)$ непрерывно изменялось вместе с $\varphi$. Сравнение

$$g(\varphi+\varphi') \equiv g(\varphi) + g(\varphi') \qquad (\mathrm{mod}\ 1)$$

тогда сразу заменится равенством

$$g(\varphi+\varphi') = g(\varphi) + g(\varphi').$$

Действительно, разность между левой и правой частями непрерывна относительно $\varphi$, все время остается целым числом и обращается в нуль при $\varphi = 0$. Из (3.14) следует, что

$$g(k\varphi) = kg(\varphi) \tag{3.15}$$

для всякого положительного целого $k$ и что

$$g(0) = 0, \quad g(-\varphi) = -g(\varphi). \tag{3.16}$$

Так как $e(g(1))=1$, то $g(1)$ должно быть некоторым целым числом $m$. Полагая сперва в (3.15) $\varphi=\frac{1}{k}$, устанавливаем справедливость равенства

$$g(\varphi)=m\varphi$$

для любой целой доли $\varphi=\frac{1}{k}$ полного оборота, затем из того же уравнения и (3.16) — для любого $k'$-кратного (положительного, нулевого или отрицательного) такого $\varphi$, т. е. для любого рационального угла $\frac{k'}{k}$, и, наконец, по непрерывности,—для всех $\varphi$. Тем самым мы и приходим к требуемому равенству (3.12).

Теорию *почти периодических функций* Гаральда Бора можно рассматривать как теорию коммутативной группы одномерных сдвигов, т. е. группы вещественных чисел со сложением в качестве их композиции. Бор открыл, что на должным образом ограниченный класс функций переносятся существенные факты теории периодических функций — ортогональность и полнота. Автор настоящей книги показал, что теоретико-групповая трактовка приводит к гораздо более простому выводу центральной теоремы полноты [5].

А. Хаару удалось с помощью остроумного построения определить „хорошую" меру объема на каждой локально эвклидовой компактной группе [6]. Иными словами, он освободился от стеснительных предположений дифференцируемости, входящих в понятие группы Ли.

Имея перед собой теорию компактных групп и боровский пример некомпактной группы, Дж. Нейман построил теорию „почти периодических представлений", их ортогональности и полноты для совершенно произвольной группы [7]. За эту общность ему, конечно, пришлось заплатить дорогой ценой: ограничением понятия функции до зачастую весьма узкой области почти периодических функций. Постараюсь изложить в нескольких словах его основную идею. Даже если наша группа является топологической, будем умышленно игнорировать ее топологию. Взамен введем искусственную топологию по отношению к заданной функции $f(s)$ на данной группе, считая по определению, что $s$ отстоит от $s_0$ на расстояние $\leqslant\varepsilon$, если для всех групповых элементов $t$ выполняются неравенства

$$|f(st)-f(s_0t)|\leqslant\varepsilon, \quad |f(ts)-f(ts_0)|\leqslant\varepsilon.$$

$f$ называется почти периодической, если группа, наделенная этой топологией, становится компактной или ограниченной, что означает, что, как бы мало ни было $\varepsilon$, групповое многообразие можно покрыть конечным числом кругов радиуса $\varepsilon$. Нейман показывает, как образовать *среднее значение* такой функции. Как только это достигнуто, теория протекает дальше по проложенным каналам. Его теория неоспоримо представляет собой кульминационный пункт всего описанного хода идей, хотя и никоим образом не „предел всех человеческих желаний“, как это шокирующе обнаруживается следующим замечанием: на группе $GL(n)$ всех невырожденных вещественных линейных преобразований единственными почти периодическими функциями являются *константы*. Поэтому простые представления $\langle P(f_1 f_2 \ldots)\rangle$ группы $GL(n)$, получавшиеся из разложения тензорного пространства, и даже представление этой группы посредством самой себя: $s \longrightarrow s$, лежат за границами области приложимости теории Неймана! Нас устраивало бы, если бы почти периодические функции позволяли различать отдельные точки, т. е. если бы для любых двух различных элементов существовала почти периодическая функция, принимающая в этих точках различные значения. Но единственными группами, на которых имеется, в этом смысле, „достаточно много“ почти периодических функций, являются прямые произведения компактных групп на некоторое число групп одномерных сдвигов (охватываемых случаем Г. Бора). Этот результат, принадлежащий Г. Фрейденталю [8], ясно указывает границы любой „почти периодической“ теории. Я бы рискнул сказать, что почти периодичность может привести к сколько-нибудь удовлетворительному решению проблемы лишь в комбинации с унитарным приемом.

Группу $\gamma$ можно заменить любым точечным полем, взаимно однозначными преобразованиями которого она реализована. Точечное поле однородно относительно этой группы, если каждые две его точки можно перевести одна в другую с помощью надлежащего преобразования из группы. Все сказанное о функциях на группе остается справедливым и при этой, более общей ситуации *функций на однородном многообразии*, наиболее характерным и классическим примером которых служат сферические гармонические функции [9].

Полнота системы примитивных характеров коммутативных групп нашла недавно важные применения в *общей топологии* [10]. Идеи, рассмотренные в этом параграфе, повидимому, лежат в пункте скрещения ряда новейших продвижений в различных областях математики.

## 4. Элемент объема на унитарной группе

Изучим несколько ближе основное равенство

$$(4.1)\qquad A = U\{\varepsilon\}U^{-1};$$

$$\{\varepsilon\} = \text{диаг. матр. } \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}, \qquad \varepsilon_k = e(\varphi_k)$$

(теорема VII.1.C), выполняющееся для элементов $A$ унитарной группы. Прежде всего, из него вытекает

Теорема (VII.4.A). *Унитарная группа является связным компактным многообразием; она состоит из одного куска.*

Действительно, фиксируя в (4.1) $U$, заменим в $\{\varepsilon\}$ углы $\varphi_k$ на $\tau\varphi_k$, где $\tau$ — вещественный параметр. Полученный в результате элемент $A_\tau$ при изменении $\tau$ от 0 до 1 будет изменяться от $A_{\tau=0} = E$ до заданного $A_{\tau=1} = A$.

Диагональные элементы $\{\varepsilon\}$ образуют $n$-параметрическую коммутативную подгруппу $\Lambda$ унитарной группы. При применении в качестве параметров углов $\varphi_k$, комбинация элементов $(\varphi_k)$ и $(\varphi_k')$ дает элемент $(\varphi_k + \varphi_k')$.

В формуле (4.1) общее $\{\varepsilon\}$ зависит от $n$ вещественных параметров, а $U$ — от $n^2$ параметров. На этом основании можно было бы ожидать, что получающееся в результате $A$, (4.1), будет зависеть от $n + n^2$ параметров, тогда как на самом деле число параметров равно лишь $n^2$. Как разрешается это кажущееся противоречие? В формуле (4.1) $U$ можно, не меняя результата $A$, заменить на $U\{\rho\}$, где $\{\rho\}$ — произвольный элемент из $\Lambda$. Поэтому удобно отождествлять такие два $U$ и $U_1$, которые право-эквивалентны по $\operatorname{mod}\Lambda$ или принадлежат одному и тому же правому смежному классу по подгруппе $\Lambda$, т. е. для которых $U^{-1}U_1$ принадлежит $\Lambda$. Этот процесс отождествления превращает $n^2$-мерное многообразие $U(n)$ в некоторое $(n^2 - n)$-мерное $[U(n)]$. $U$, как элемент из $[U(n)]$, будет обозначаться через $[U]$. Пользуясь наглядной геометрической терминологией, мы будем говорить, что два элемента $U$, $U_1$, право-эквивалентные $\operatorname{mod}\Lambda$, лежат на одной *вертикали*.

Переходу от элемента $U$ к близкому элементу $U + dU$ мы отнесли инфинитезимальный элемент $\delta U = U^{-1}dU$. Изучая тот же процесс на $[U(n)]$, мы вправе заменить

$$U + dU \quad \text{на} \quad (U + dU)(1 + 2\pi i\{d\rho\}),$$

где второй множитель с вещественными бесконечно малыми параметрами $d\rho$ есть любой инфинитезимальный элемент из $\Lambda$, Таким образом, $dU$ заменяется на

$$d'U = dU + 2\pi i U\{d\rho\},$$

а $\delta U$ — на

$$\delta' U = \delta U + 2\pi i\{d\rho\}.$$

Так как диагональные компоненты $\delta u_{ii}$ в $\delta U$ — чисто мнимые, то им можно приписать, надлежащим образом выбирая $d\rho_i$, любые наперед данные значения; „боковые" же (т. е. не диагональные) компоненты вовсе не зависят от произвола в выборе $d\rho$. В частности, можно выбрать $\delta u_{ii} = 0$; в этом случае мы будем называть $\delta U$ *горизонтальным* переходом от вертикали $[U]$ к бесконечно близкой вертикали $[U + dU]$ на высоте $U$. Параллелепипедальный пучок, образованный вертикалями из $[U(n)]$, натянутыми на $n^2 - n$ линейных элементов при $[U]$, имеет поперечное сечение, определяемое $n^2 - n$ такими горизонталями $\delta U$ при $U$. В качестве объема этого поперечного сечения мы примем абсолютное значение определителя боковых компонент $\delta u_{ik}$ $(i \neq k)$ этих $\delta U$. Образуя поперечное сечение того же пучка на другой высоте, мы должны заменить $U$ и $U + dU$, соответственно, на

$$UR \quad \text{и} \quad (U + dU)R,$$

где

$$R = \{\rho\} = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}, \quad \rho_k = e(\psi_k)$$

— произвольный элемент из $\Lambda$. Поэтому $\delta U = U^{-1}dU$ заменяется на

$$\delta' U = (UR)^{-1} \cdot dU \cdot R = R^{-1} \cdot \delta U \cdot R,$$

с компонентами

$$\delta' u_{ik} = \frac{\rho_k}{\rho_i}\delta u_{ik}. \tag{4.2}$$

Если $\delta U$ горизонтально, то горизонтально и $\delta' U$. Линейная подстановка (4.2) $n^2 - n$ боковых компонент $\delta u_{ik}$ вследствие взаимного сокращения множителей $\frac{\rho_k}{\rho_i}$, $\frac{\rho_i}{\rho_k}$, соответствующих каждым двум парам $(i, k)$ и $(k, i)$, унимодулярна. Поэтому объем поперечного сечения не зависит от высоты, и тем самым мы ввели на $(n^2 - n)$-мерном многообразии $[U(n)]$ приемлемую меру объема.

Верно ли, что никакое $U$, не являющееся право-эквивалентным первоначальному по $\operatorname{mod} \Lambda$, не приводит в (4.1) к тому же $A$? При замене $U$ на $UR$ матрица $A$ останется неизменной в том и только в том случае, если $R = \|\rho_{ik}\|$ перестановочна с $\{\varepsilon\}$:

$$\varepsilon_i \rho_{ik} = \rho_{ik}\varepsilon_k \quad \text{или} \quad \rho_{ik}(\varepsilon_i - \varepsilon_k) = 0.$$

Поэтому, если все собственные значения $\varepsilon_k$ различны, то $R$ должна быть диагональной матрицей, и наш вопрос разрешается в утвердительном смысле. Назовем элемент $A$, у которого совпадает пара собственных значений $\varepsilon_k$, например $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, *сингулярным. В $n^2$-мерной унитарной группе сингулярные элементы образуют многообразие, меньшее не на одно, как можно было бы ожидать, а на три измерения.* Действительно, нашему $R$ в этом случае разрешается иметь вид

$$\left\|\begin{array}{cc|ccc} \rho_{11} & \rho_{12} & & & \\ \rho_{21} & \rho_{22} & & & \\ \hline & & \rho_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \rho_n \end{array}\right\|,$$

и так как двумерное унитарное преобразование содержит 4 параметра, то $R$ будет зависеть от $4 + (n-2) = n + 2$ вещественных параметров. Тем самым число существенных параметровв $U$ (по модулю подгруппы этих $R$) приводится к $n^2 - (n+2)$, тогда как общее $\{\varepsilon\}$ с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ зависит от $n-1$ параметров. Сумма равна $n^2 - 3$.

В § 1 было дано прямое алгебраическое доказательство равенства (4.1). Можно воспользоваться и идеей аналитического доказательства по непрерывности: добиваться достижения каждой данной инфинитезимальной вариации матрицы $A$, давая соответствующие приращения матрицам $U$ и $\{\varepsilon\}$. В более общих случаях, в теории полупростых групп, этот способ навязывается необходимостью; но даже и в нашем случае стóит провести соответствующее вычисление. Имеем: из

$$AU = U\{\varepsilon\}$$

следует

$$dA \cdot U + A \cdot dU = dU \cdot \{\varepsilon\} + U\{\varepsilon\} \cdot 2\pi i\,\{d\varphi\}.$$

Умножаем левую часть (слева) на $(AU)^{-1} = U^{-1}A^{-1}$ и правую — на равное ему $\{\varepsilon\}^{-1}U^{-1}$:

$$U^{-1} \cdot \delta A \cdot U + \delta U = \{\varepsilon\}^{-1}\delta U\{\varepsilon\} + 2\pi\sqrt{-1}\,\{d\varphi\}.$$

Для

$$\delta B = U^{-1} \cdot \delta A \cdot U = \|\delta b_{ik}\|$$

получаем формулы:

$$(4.3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \delta b_{ii} = 2\pi\sqrt{-1}\,d\varphi_i, \\ \delta b_{ik} = \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} - 1\right)\delta u_{ik} \end{array}\right. \qquad (i \neq k).$$

Если считать $\delta A$ заданным, то первая система уравнений однозначно определяет приращения $d\varphi_i$, а вторая — приращения боковых компонент $\delta u_{ik}$ $(i \neq k)$, тогда как диагональные компоненты $\delta u_{ii}$ остаются свободными. Эти утверждения, опирающиеся на предположение, что $A$ не сингулярна, находятся в полном согласии с нашими предшествующими рассмотрениями. Варьируя $A$, можно обойти сингулярные точки, образующие многообразие, на три измерения меньшее.

Замечая, что переход

$$\text{от } \delta A = \|\delta a_{ik}\| \quad \text{к} \quad \delta B = U^{-1} \cdot \delta A \cdot U = \|\delta b_{ik}\|$$

есть квази-унимодулярное преобразование, выводим из (4.3) следующую формулу для элемента объема $d\omega_A$, в котором изменяется (4.1), когда $[U]$ в многообразии $[U(n)]$ изменяется в элементе объема $[d\omega_U]$, а углы $\varphi_k$ изменяются между $\varphi_k$ и $\varphi_k + d\varphi_k$:

$$d\omega_A = (2\pi)^n \left| \prod_{i \neq k} \left( \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} - 1 \right) \right| \cdot [d\omega_U] \cdot d\varphi_1 \ldots d\varphi_n.$$

$d\omega_A$ и $[d\omega_U]$ обозначают здесь объемы соответствующих элементов. Множители

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} - 1$$

входят сопряженными парами:

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} - 1 \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1 = \frac{\overline{\varepsilon}_k}{\varepsilon_i} - 1,$$

и, объединяя их, получаем:

Теорема (VII.4.B.) *Если $A$ определено через $[U]$ и $\{\varepsilon\}$ — формулой (4.1), то объемы соответствующих инфинитезимальных частей связаны формулой*

$$d\omega_A = (2\pi)^n [d\omega_U] \cdot \Delta\overline{\Delta}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n,$$

*где*

$$\Delta = \prod_{i<k} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)$$

*есть разностное произведение $D(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ величин $\varepsilon_i$.*

Интегрируя по всему $[U(n)]$ и надлежащим образом выбирая единицу измерения, приходим к следующему фундаментальному выражению для плотности классов в пространстве $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$:

Теорема (VII.4.C). *Объем той части унитарной группы, у элементов которой углы заключены между* $\varphi_k$ *и* $\varphi_k + d\varphi_k$, *дается выражением*

$$\Delta\bar{\Delta}\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n. \tag{4.4}$$

После всего предшествующего, эта формула не является слишком неожиданной. Сингулярные элементы, для которых $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, составляют многообразие, меньшее на три измерения; таким образом, они подобны центру полярной системы координат в трехмерном пространстве. Формула для элемента объема трехмерного пространства в полярных координатах содержит множитель $r^2$ второго порядка малости в начале. На том же основании плотность здесь должна быть бесконечно малой второго порядка относительно $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, т. е. должна содержать множитель $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2$. То же верно и для всех других пар $\varepsilon_i$, $\varepsilon_k$. (4.4) есть простейшее из возможных выражений, удовлетворяющих этому требованию.

Каждая *функция классов* $f(A)$ на унитарной группе является симметрической функцией $F(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ от углов $\varphi_k$, периодической с периодом 1 относительно всех $n$ аргументов. Наш результат допускает такую новую формулировку:

Теорема (VII.4.D). *Среднее значение любой функции классов* $F$ *задается выражением*

$$\frac{1}{\Omega}\int_0^1 \dots \int_0^1 F \cdot \Delta\bar{\Delta}\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n,$$

*где*

$$\Omega = \int_0^1 \dots \int_0^1 \Delta\bar{\Delta}\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n.$$

## 5. Вычисление характеров

После этих приготовлений мы можем уже в несколько строк осуществить вычисление характеров унитарной группы $U(n)$. Оно основывается на трех замечаниях [11]. Рассмотрим любое непрерывное представление степени $N$ группы $U(n)$ и его характер $\chi$.

1) Как функция классов, $\chi$ будет *непрерывной симметрической периодической функцией* от $n$ углов $\varphi_k$. Это связывает формулу (4.1) с нашей задачей.

2) $\chi$ есть след матрицы, представляющей диагональный элемент $\{\varepsilon\}$. Поэтому мы можем ограничиться группой $\Lambda$ диагональных элементов, являющейся компактной коммутативной группой очень простой структуры. Заданное ее представление эквивалентно некоторому унитарному и потому, согласно теореме (VII.1.D), разбивается на $N$ унитарных представлений $E_K(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ степени 1 $(K=1, \ldots, N)$, каждое из которых удовлетворяет функциональным уравнениям

$$(5.1) \qquad |E(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)| = 1,$$

$$(5.2) \qquad E(\varphi_1+\varphi_1', \ldots, \varphi_n+\varphi_n') = E(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\cdot E(\varphi_1', \ldots, \varphi_n').$$

Полагая

$$E(\varphi, 0, \ldots, 0) = f_1(\varphi), \quad E(0, \varphi, \ldots, 0) = f_2(\varphi), \quad \ldots,$$

получаем из (5.2):

$$E(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = f_1(\varphi_1)\ldots f_n(\varphi_n).$$

Каждая из этих $n$ функций $f$ от одного переменного является решением функционального уравнения (3.13) и потому имеет вид $e(m\varphi)$, где $m$ — целое число. Следовательно,

$$(5.3) \qquad E(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = e(m_1\varphi_1 + \ldots + m_n\varphi_n) = \varepsilon_1^{m_1}\ldots\varepsilon_n^{m_n}.$$

Поэтому след, сумма $N$ величин $E_K$, или наш характер $\chi$ является *конечным рядом Фурье с неотрицательными целыми коэффициентами.*

Мы всегда будем располагать одночлены

$$\varepsilon_1^{m_1}\ldots\varepsilon_n^{m_n} = e(m_1\varphi_1 + \ldots + m_n\varphi_n)$$

в лексикографическом порядке, так что член с показателями $m_1, \ldots, m_n$ будет считаться предшествующим члену с показателями $m_1', \ldots, m_n'$, если первая из не равных нулю разностей

$$m_1 - m_1', \ \ldots, \ m_n - m_n'$$

положительна.

3) Вид (4.4) элемента объема, входящего в соотношения ортогональности для примитивных характеров, наводит на мысль отнести каждому характеру $\chi$ функцию

$$(5.4) \qquad \chi\cdot\Delta = \xi.$$

Эта $\xi$ будет *антисимметрической* периодической функцией и снова конечным рядом Фурье с целыми коэффициентами. Коэффициент при старшем члене — тот же, что и у $\chi$, и потому положителен.

Простейшими антисимметрическими периодическими функциями являются *„элементарные суммы“*

(5.5) $$\xi(l_1\ldots l_n)=\sum\pm e(l_1\varphi_1+\ldots+l_n\varphi_n),$$

распространенные знакопеременно на все перестановки углов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (или чисел $l_1, \ldots, l_n$). $l_i$ суть целые числа, расположенные в порядке убывания:

(5.6) $$l_1>l_2>\ldots>l_n.$$

Сумму (5.5) можно записать в виде определителя

$$|\varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|,$$

$n$ строк которого получаются из выписанной путем последовательной замены $\varepsilon$ на $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Пусть

(5.7) $$c\cdot e(l_1\varphi_1+\ldots+l_n\varphi_n) \qquad (c>0)$$

— старший член антисимметрической функции $\xi$. Вместе с ним $\xi$ должна содержать все члены

$$\pm c\cdot e(l_1'\varphi_1+\ldots+l_n'\varphi_n),$$

где $l_1', \ldots, l_n'$ — любая перестановка ряда $l_1, \ldots, l_n$. Поэтому члены со знаком минус и, в частности, члены, получающиеся путем транспозиции, должны быть ниже чем (5.7), так что

$$l_1>l_2>\ldots>l_n.$$

Вычтя $c\cdot\xi(l_1\ldots l_n)$ из $\xi$, мы можем применить то же рассуждение к оставшейся части, и так получить в итоге разложение по убывающим членам, вида

(5.8) $$\xi=c\cdot\xi(l_1\ldots l_n)+c'\cdot\xi(l_1'\ldots l_n')+\ldots,$$

где коэффициенты $e$, $c'$, ... — целые и

(5.9) $$c>0.$$

Из соотношения

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 e(m_1\varphi_1+\ldots+m_n\varphi_n)\cdot\overline{e}(m_1'\varphi_1+\ldots+m_n'\varphi_n)\,d\varphi_1\ldots d\varphi_n=\begin{cases}1, \text{ если } m_1=m_1', \ldots, m_n=m_n',\\ 0 \text{ в противном случае}\end{cases}$$

легко следует соотношение

$$(5.10)\qquad \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \xi(l_1 \ldots l_n)\,\overline{\xi}(l'_1 \ldots l'_n)\,d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = \begin{cases} n!, \text{ если } l_1 = l'_1, \ \ldots, \ l_n = l'_n, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что определитель $\Delta$ сам является элементарной суммой, а именно,

$$\Delta = \xi(n-1, \ \ldots, \ 1, \ 0);$$

поэтому

$$\Omega = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \Delta\overline{\Delta}\,d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = n!.$$

Применяя к разложению (5.8) „соотношения ортогональности“ (5.10), получаем поэтому:

$$\mathfrak{M}_s\,\{\chi(s)\,\overline{\chi}(s)\} = \frac{1}{\Omega}\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \chi\overline{\chi}\Delta\overline{\Delta}\,d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = c^2 + c'^2 + \ldots$$

Если характер $\chi$ примитивен, то это среднее должно быть равно 1. Следовательно, разложение состоит из одного лишь первого члена и $c = \pm 1$, или, принимая во внимание (5.9), $c = 1$.

Теорема (VII.5.A). *Любой примитивный характер унитарной группы имеет вид*

$$(5.11)\qquad \frac{|\,\varepsilon^{l_1}, \ \varepsilon^{l_2}, \ \ldots, \ \varepsilon^{l_n}\,|}{|\,\varepsilon^{n-1}, \ \ldots, \ \varepsilon, \ 1\,|},$$

*где* $l_1, \ \ldots, \ l_n$ — *убывающие целые числа.*

Старшим членом этого конечного ряда Фурье (5.11) служит

$$\varepsilon_1^{f_1} \ldots \varepsilon_n^{f_n},$$

где

$$(5.12)\qquad f_1 = l_1 - (n-1), \ \ldots, \ f_{n-1} = l_{n-1} - 1, \ f_n = l_n - 0,$$

так что

$$(5.13)\qquad f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n.$$

Мы обозначим функцию (5.11) через $\chi(f_1 \ldots f_n)$.

Для нахождения степени $N$ следует положить $\varphi_1 = \ldots$ $\ldots = \varphi_n = 0$. Но это нельзя сделать непосредственно, потому что получилась бы неопределенность $\frac{0}{0}$. Поэтому мы сперва полагаем

$$\varphi_1=(n-1)\varphi, \ \dots, \ \varphi_{n-1}=1\cdot\varphi, \ \varphi_n=0\cdot\varphi,$$

благодаря чему числитель выражения (5.11) превращается в разностное произведение чисел $e(l_i\varphi)$, и так как для малых $\varphi$, в первом приближении,

$$e(l_i\varphi)-e(l_k\varphi)\sim 2\pi\sqrt{-1}\,(l_i-l_k)\,\varphi,$$

то получаем

$$N=N(f_1\dots f_n)=\frac{D(l_1,\dots,l_{n-1},l_n)}{D(n-1,\dots,1,0)}. \tag{5.14}$$

Вот и вся трансцендентная часть. В § 5 главы IV мы пробили туннель с другой стороны, показав, что алгебраически построенное неприводимое представление сигнатуры $(f_1,\dots,f_n)$, — являющееся в случае $f_n\geqslant 0$ представлением $\langle P(f_1\dots f_n)\rangle$, — имеет своим характером $\chi$ полином

$$\sum k_{m_1\dots m_n}\varepsilon_1^{m_1}\dots\varepsilon_n^{m_n}$$

с неотрицательными целыми коэффициентами $k$, старшим членом которого служит

$$1\cdot\varepsilon_1^{f_1}\dots\varepsilon_n^{f_n}.$$

Поэтому $\chi$ не может быть ничем другим, кроме нашего $\chi(f_1\dots f_n)$.

Теорема (VII.5.B). *Неприводимое представление сигнатуры $(f_1,\dots,f_n)$ унитарной группы имеет характер*

$$\chi(f_1\dots f_n)=\frac{|\varepsilon^{l_1},\dots,\varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1},\dots,\varepsilon^{0}|} \tag{5.15}$$

*и степень*

$$N(f_1\dots f_n)=\frac{D(l_1,\dots,l_n)}{D(n-1,\dots,0)}, \tag{5.14}$$

*где*

$$l_1=f_1+(n-1), \ \dots, \ l_{n-1}=f_{n-1}+1, \ l_n=f_n+0. \tag{5.16}$$

Теорема (VII.5.A) позволяет тогда сделать следующее заключение:

Теорема (VII.5.C). *Не существует никаких иных непрерывных неприводимых представлений унитарной группы, кроме представлений сигнатуры*

$$\boxed{(f_1, \ldots, f_n), \quad f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n.}$$

Величины, названные нами „обобщенными“, суть единственные примитивные величины для унитарной группы.

## 6. Характеры группы $GL(n)$. Перечисление ковариантов

Начиная отсюда, мы делаем несущественное ограничение $f_n \geqslant 0$, так что представление сигнатуры $(f_1, \ldots, f_n)$ есть $\langle P(f_1 \ldots f_n) \rangle$.

$\chi(f_1 \ldots f_n)$ является симметрическим полиномом от переменных $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ и должен поэтому выражаться через элементарные симметрические функции, т. е. через коэффициенты характеристического полинома

$$\varphi(z) = \prod_i (1 - z\varepsilon_i) = \det(E - zA) = 1 - q_1 z + \ldots \pm q_n z^n.$$

Явное вычисление основывается на следующей лемме Коши:

Лемма (VII.6.A).

$$\det\left(\frac{1}{1 - x_i y_k}\right) = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)\, D(y_1, \ldots, y_n)}{\prod (1 - x_i y_k)} \quad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Доказательство индукцией по $n$. Вычтем первую строку определителя, стоящего в левой части, из второй, ..., $n$-й строки:

$$\frac{1}{1 - x_2 y_k} - \frac{1}{1 - x_1 y_k} = \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 y_k} \cdot \frac{y_k}{1 - x_2 y_k}, \ \ldots$$

Получим

$$\frac{(x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_1)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - x_1 y_k)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{y_1}{1 - x_2 y_1} & \frac{y_2}{1 - x_2 y_2} & \ldots & \frac{y_n}{1 - x_2 y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \tag{6.1}$$

Вычтем теперь первый столбец из второго, ..., $n$-ного; это превратит первую строку в $|1\,0 \ldots 0|$, судьбу же других строк можно прочесть из равенства

$$\frac{y_k}{1 - x_2 y_k} - \frac{y_1}{1 - x_2 y_1} = \frac{y_k - y_1}{1 - x_2 y_1} \cdot \frac{1}{1 - x_2 y_k}.$$

В результате определитель в (6.1) превратится в

$$\frac{(y_2-y_1)\ldots(y_n-y_1)}{(1-x_2y_1)\ldots(1-x_ny_1)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \frac{1}{1-x_2y_2} & \ldots & \frac{1}{1-x_2y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ * & \frac{1}{1-x_ny_2} & \ldots & \frac{1}{1-x_ny_n} \end{vmatrix},$$

что и дает требуемый результат:

$$\det\left(\frac{1}{1-x_ly_k}\right)_{l,\,k=1,\,\ldots,\,n} =$$

$$=\frac{(x_2-x_1)\ldots(x_n-x_1)\cdot(y_2-y_1)\ldots(y_n-y_1)}{\prod\limits_{l,\,k=1}^{n}(1-x_ly_k)}\cdot\det\left(\frac{1}{1-x_ly_k}\right)_{l,k=2,\,\ldots,n}.$$

Полагая $x_l=\varepsilon_l$, находим:

$$\frac{D(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n)\cdot D(z_1,\ \ldots,\ z_n)}{\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_n)}=\left|\frac{1}{1-\varepsilon_lz_k}\right|. \tag{6.2}$$

Формула

$$\frac{1}{1-\varepsilon z}=1+\varepsilon z+\varepsilon^2z^2+\ldots$$

показывает, что разложение правой части (6.2) по степеням переменных $z_k$ содержит одночлен

$$z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n}, \tag{6.3}$$

умноженный на коэффициент

$$|\varepsilon^{l_1},\ \ldots,\ \varepsilon^{l_n}|.$$

Тем самым мы получаем для правой части сумму

$$\sum|\varepsilon^{l_1},\ \ldots,\ \varepsilon^{l_n}|\,|z^{l_1},\ \ldots,\ z^{l_n}|,$$

распространенную на все неотрицательные целые $l$, удовлетворяющие неравенствам (5.6). Поэтому $\chi(f_1\ldots f_n)$ служит коэффициентом при (6.3) в разложении выражения

$$\frac{|z^{n-1},\ \ldots,\ z,\ 1|}{\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_n)}.$$

Вводя, как раньше, полиномы $p_0, p_1, \ldots$ посредством разложения

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{|E-zA|}=p_0+p_1z+p_2z^2+\ldots \tag{6.4}$$

$$(p_{-1}=p_{-2}=\ldots=0),$$

приходим к формуле [12]

$$\chi(f_1\ldots f_n)=|p_{l-(n-1)},\ \ldots,\ p_{l-1},\ p_l|. \tag{6.5}$$

Правая часть обозначает определитель, состоящий из $n$ строк, получающихся из выписанной путем последовательной замены $l$ на $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Теперь мы можем *вернуться от унитарной к полной линейной группе.* Характер $\chi(f_1\ldots f_n)$ представления группы $GL(n)$, соответствующего диаграмме $T(f_1\ldots f_n)$, очевидно, является полиномом от $n^2$ компонент $a_{ik}$ общего элемента $A=\|a_{ik}\|$ этой группы. То же представляет собой и правая часть равенства (6.5). Поэтому, согласно лемме (VII.1.A), это равенство выполняется для всех $A$; и по самой своей природе формула (6.5) сохраняет силу в любом поле характеристики 0.

Теорема (VII.6.B). *Характер $\chi(f_1\ldots f_n)$ представления $\langle P(f_1\ldots f_n)\rangle$ группы $GL(n)$, соответствующего разбиению $f=f_1+\ldots+f_n$, задается формулой* [13]

$$\chi(f_1\ldots f_n)=|p_{l-(n-1)},\ \ldots,\ p_l|, \tag{6.5}$$

*где $l$ в последовательных строках определителя в правой части следует заменить на*

$$l_1=f_1+(n-1),\ \ldots,\ l_{n-1}=f_{n-1}+1,\quad l_n=f_n,$$

*а $p_f$ суть коэффициенты ряда Тэйлора*

$$\frac{1}{|E-zA|}=p_0+p_1z+p_2z^2+\ldots$$

Этот результат лишь слегка сложнее формулы (2.16) для характера представления $\langle\Sigma(f_1f_2\ldots f_r)\rangle$. Перейдем теперь к разложению последнего характера, при произвольном $r$.

Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — произвольные целые числа, удовлетворяющие условию

$$f_1\geqslant\ldots\geqslant f_r\geqslant 0,\quad f_1+\ldots+f_r=f, \tag{6.6}$$

и пусть числа $l$ определены формулами

$$l_1=f_1+(r-1),\ \ldots,\ l_{r-1}=f_{r-1}+1,\quad l_r=f_r+0.$$

Равенство (6.5) побуждает нас исследовать определитель

$$\chi(f_1\ldots f_r)=|p_{l-(r-1)},\ \ldots,\ p_{l-1},\ p_l| \tag{6.7}$$

сигнатуры $(f_1, \ldots, f_r)$. При рассмотрении случая $r>n$ мы хотим свести длину $r$ наших символов $\chi$ к $n$. Прежде всего, если

$f_{r+1}=0$, то имеем очевидное и простое сведение:

$$\chi(f_1\dots f_r\,0)=\chi(f_1\dots f_r).$$

Если, однако, $f_{r+1}>0$, то я утверждаю, что

$$\chi(f_1\dots f_{r+1})=0.$$

Действительно, запишем $\varphi(z)$ как полином формальной степени $r$:

$$(6.8)\qquad \varphi(z)=c_0+c_1z+\dots+c_rz^r \qquad (c_0=1).$$

(Разумеется, в обозначениях (2.5) мы имеем $c_i=(-1)^i q_i$ для $i=0, 1, \dots, n$ и $c_i=0$ для $i>n$.) Рекуррентные соотношения

$$(6.9)\qquad c_0p_l+c_1p_{l-1}+\dots+c_rp_{l-r}=\begin{cases}0 \text{ для } l>0,\\ 1 \text{ для } l=0\end{cases}$$

представляют собой лишь другую форму определяющего уравнения

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_lz^l\cdot\varphi(z)=1.$$

Полагая в (6.9) $l=l_1, \dots, l_{r+1}$, мы получаем $r+1$ однородных линейных уравнений с ненулевым решением $c_0, c_1, \dots, c_r$; поэтому их определитель $\chi(f_1\dots f_{r+1})$ должен быть равен нулю.

Все символы $\chi(f_1\dots f_n)$ длины $n$ линейно независимы, как это явствует из их выражения (5.15) через диагональную матрицу $A$:

$$a_{ik}=0 \text{ для } i\neq k, \quad a_{ii}=\varepsilon_i.$$

Числа $\varepsilon_i$ здесь уже не подчинены условию $|\varepsilon_i|=1$, которое в произвольном поле лишено смысла, и должны рассматриваться скорее, как независимые переменные.

Правило приведения (VII.6.C). *Для $r\geqslant n$ имеем*

$$\chi(f_1\dots f_rf_{r+1})=0, \text{ если } f_{r+1}>0,$$
$$\chi(f_1\dots f_r\,0)=\chi(f_1\dots f_r).$$

*Символы $\chi(f_1\dots f_n)$ длины $n$ линейно независимы.*

Теперь займемся чисто комбинаторными рассуждениями, рассматривая при этом $p_0, p_1, \dots$ как независимые величины. Сигнатуры $(f_1, \dots f_r)$ заданного ранга $f$,

$$f_1+\dots+f_r=f, \quad f_1\geqslant f_2\geqslant\dots\geqslant f_r\geqslant 0,$$

можно расположить в лексикографическом порядке, начиная от высшей сигнатуры $(f, 0, \ldots, 0)$. Определитель $\chi(f_1 \ldots f_n)$ является агрегатом из $r!$ членов

$$p_{f'_1} \ldots p_{f'_r} = \psi(f'_1 \ldots f'_r) \quad (f'_1 \geqslant \ldots \geqslant f'_r \geqslant 0), \tag{6.10}$$

сигнатуры которых $(f'_1, \ldots, f'_r)$ имеют один и тот же ранг $f$. Старшим членом служит $\psi(f_1 \ldots f_r)$, и я утверждаю, что все остальные члены лексикографически выше. Поэтому линейные соотношения, связывающие $\chi(f_1 \ldots f_r)$ с членами $\psi(f_1 \ldots f_r)$ заданного ранга $f$, суть соотношения арифметически рекуррентного типа. Уравнения

$$y_\alpha = \sum k_{\beta\alpha} x_\beta,$$

связывающие две совокупности переменных $x_\alpha$, $y_\alpha$, индексы которых образуют упорядоченное множество, суть соотношения этого типа, если коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$k_{\alpha\alpha} = 1, \quad k_{\beta\alpha} = 0 \text{ для } \beta < \alpha.$$

Обратная подстановка будет тогда того же типа. Отсюда:

Теорема (VII.6.D). *Будем рассматривать $p_f$ как независимые переменные. Тогда произведения $p_{f_1} \ldots p_{f_r}$ предписанного полного ранга $f_1 + \ldots + f_r = f$ получаются из определителей $\chi(f_1 \ldots f_r)$ посредством линейной подстановки арифметически рекуррентного типа*:

$$p_{f_1} \ldots p_{f_r} = \sum \mu\chi(f'_1 \ldots f'_r). \tag{6.11}$$

Наше утверждение относительно рекуррентного характера рассматриваемых соотношений не так уж совсем тривиально, как это может показаться. Развертывая определитель (6.7) и записывая множители в каждом члене (6.10) в порядке получения их из последовательных строк, мы действительно видим, что $(f'_1, \ldots, f'_r)$ выше чем $(f_1, \ldots, f_r)$, т. е. что первая отличная от нуля разность $f'_i - f_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ положительна. Однако числа $f'_1, \ldots, f'_r$ могут появляться и не в правильном их порядке $f'_1 \geqslant \ldots \geqslant f'_r$. Но, располагая их в правильном порядке: $g_1 \geqslant g_2 \geqslant \ldots \geqslant g_r$, легко убедиться в том, что $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ не может быть ниже, чем $(f'_1, f'_2, \ldots, f'_r)$.

Выразим теперь снова наши $p_f$ с помощью формулы (6.4) через произвольную $n$-строчную матрицу $A = \|a_{ik}\|$. При $n = r$

формула (6.11) выражает разложение представления $\langle \Sigma(f_1 \ldots f_r)\rangle$ на его неприводимые части $\langle \mathrm{P}(f_1' \ldots f_r')\rangle$; поэтому коэффициенты $\mu$ в (6.11) должны быть $\geqslant 0$. После применения нашего правила приведения, эта формула имеет тот же смысл и при $n < r$:

Теорема (VII.6.E). *В рекуррентной формуле* (6.11) *коэффициенты* $\mu$ *неотрицательны. Эта формула выражает разложение представления* $\langle \Sigma(f_1 \ldots f_r)\rangle$ *на его неприводимые части — непосредственно при* $n = r$ *и после надлежащего приведения по правилу* (VII.6.C) — *при* $n < r$.

Поэтому разложение *cum grano salis* (в известной степени) не зависит от размерности $n$, и мы можем вычислить кратность $\mu$, с которой входит каждая составляющая, с помощью простого комбинаторного приема, а именно, по формулам (6.11), получаемым путем обращения уравнений (6.7), определяющих $\chi(f_1 \ldots f_r)$ через произведения $p_{f_1'} \ldots p_{f_r'}$.

Тот выражаемый нашей формулой

$$p_{e_1} \ldots p_{e_r} = \sum_f \mu \begin{pmatrix} e_1 \ldots e_r \\ f_1 \ldots f_n \end{pmatrix} \chi(f_1 \ldots f_n) \tag{6.12}$$

факт, что представление $\langle \Sigma(e_1 \ldots e_r)\rangle$ содержит неприводимую компоненту $\langle \mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)\rangle$ $\mu\begin{pmatrix} e_1 \ldots e_r \\ f_1 \ldots f_n \end{pmatrix}$ раз, означает в то же время существование стольких же линейно независимых ковариантных величин типа $\langle \mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)\rangle$, зависящих от $r$ векторных аргументов в степенях соответственно $e_1, \ldots, e_r$. Мы можем расположить кратности $\mu$ в (бесконечную) матрицу, где $(e_1 \ldots e_r)$ обозначают строки, а $(f_1 \ldots f_n)$ — столбцы. Желая для заданного типа $\langle \mathrm{P}(f_1 \ldots f_n)\rangle$ определить число ковариантных величин одновременно для всех возможных степеней $(e_1, \ldots, e_r)$, мы должны вычислить столбец $\mu$-матрицы с индексом $(f_1 \ldots f_n)$, тогда как разложение представления $\langle \Sigma(e_1 \ldots, e_r)\rangle$ требует знания ее строки с индексом $(e_1 \ldots e_r)$. Более явным путем, чем при помощи нашего комбинаторного приема, обе задачи можно решить посредством *производящих функций*. Начнем с первого вопроса, и будем поэтому разыскивать „производящую функцию столбцов“

$$\Phi_{f_1 \ldots f_n}(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{(e)} \mu \begin{pmatrix} e_1 \ldots e_r \\ f_1 \ldots f_n \end{pmatrix} z_1^{e_1} \ldots z_r^{e_r} \tag{6.13}$$

— формальный степенной ряд по $r$ вспомогательным переменным $z_1, \ldots, z_r$.

Рассмотрим, при $r \geqslant n$, функцию

$$H(z_1, \ldots, z_r) = \frac{D(z_1, \ldots, z_r)}{\varphi(z_1) \ldots \varphi(z_r)}$$

и выведем сперва простую рекуррентную формулу для перехода $r \longrightarrow r+1$. Умножим в определителе

$$|z^r, z^{r-1}, \ldots, 1|,$$

стоящем в числителе функции $H(z_1, \ldots, z_{r+1})$, первые $r$ столбцов на коэффициенты $c_r, \ldots, c_1$, введенные в (6.8), и прибавим результаты к последнему столбцу. Превратив тем самым последний столбец в $\varphi(z)$, развернем затем определитель по этому столбцу, и получим (при $r \geqslant n$):

$$H(z_1, \ldots, z_{r+1}) = H(z_1, \ldots, z_r) \cdot z_1 \ldots z_r - + \ldots, \tag{6.14}$$

где справа стоит знакопеременная сумма из $r+1$ членов, в которых последовательно отсутствуют $z_{r+1}, z_r, \ldots, z_1$.

Теперь заметим, что при $r = n$

$$\frac{1}{\varphi(z_1) \ldots \varphi(z_n)} = \sum_l p_{l_1} \ldots p_{l_n} z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n};$$

поэтому

$$\begin{aligned} H(z_1, \ldots, z_n) &= \sum |p_{l-(n-1)}, \ldots, p_l| z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n} = \\ &= \sum_{(l_1 > \ldots > l_n \geqslant 0)} |p_{l-(n-1)}, \ldots, p_l| \, |z^{l_1}, \ldots, z^{l_n}| = \\ &= \sum_{(f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0)} |z^{f_1+(n-1)}, \ldots, z^{f_n+0}| \chi(f_1 \ldots f_n). \end{aligned}$$

Тем самым мы нашли разложение $H(z_1, \ldots, z_r)$ по характерам $\chi(f_1 \ldots f_n)$:

$$H(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{(f)} L_{f_1 \ldots f_n}(z) \cdot \chi(f_1 \ldots f_n), \tag{6.15}$$

где коэффициенты $L$ для каждой сигнатуры $(f_1, \ldots, f_n)$ подчинены тому же рекуррентному правилу (6.14), что и $H$, и при $r = n$ приводятся к

$$L_{f_1 \ldots f_n}(z_1, \ldots, z_n) = |z^{f_1+(n-1)}, \ldots, z^{f_n+0}|.$$

Легко проверить, что выражения

$$\begin{aligned} L_{f_1 \ldots f_n}(z_1, \ldots, z_r) &= \\ &= |z^{f_1+(r-1)}, \ldots, z^{f_n+(r-n)}, \ldots, \vdots z^{r-n-1}, \ldots, z, 1| \end{aligned} \tag{6.16}$$

удовлетворяют обоим условиям. Следовательно, эти выражения и являются искомыми коэффициентами в (6.15). Производящие функции $\Phi$ суть, по определению, не зависящие от $A$ коэффициенты в выражении

$$\frac{1}{\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_r)}=\sum_{(f)}\Phi_{f_1\ldots f_n}(z)\chi(f_1\ldots f_n)$$

и потому совпадают с соответствующими отношениями $\frac{L}{D}$. Так как выражение $L$ косо-симметрично относительно $r$ его аргументов $z_1, \ldots, z_r$, то отношение $\frac{L}{D}$ является полиномом, очевидно, степени $f_1+\ldots+f_n$.

Теорема (VII.6.F). *Производящая функция* $\Phi$, (6.13), *дающая числа* $\mu$ *линейно независимых ковариантов типа* $(f_1, \ldots, f_n)$, *зависящих от заданного числа* $r$ *векторных аргументов во всех возможных степенях* $(e_1, \ldots, e_r)$, *является частным от деления антисимметрического полинома* (6.16) *на разностное произведение* $D(z_1, \ldots, z_r)$.

Мы пришли к весьма существенной и изящной формуле. В частности, при $f_1=\ldots=f_n=g$ она дает *числа линейно независимых векторных инвариантов заданного веса* $g$ и любых степеней $e_1, \ldots, e_r$. Производящей функцией для инвариантов веса $g$, *зависящих от* $n$ *векторов* $x^1, \ldots, x^n$, оказывается

$$(z_1\ldots z_n)^g.$$

Другими словами: если степени не удовлетворяют условию $e_1=\ldots=e_r=g$, то нет вообще никакого такого инварианта, а при выполнении этого условия имеется точно *один* инвариант (а именно, $g$-я степень компонентного определителя $[x^1\ldots x^n]$). Тем самым наша формула доставляет доказательство первой основной теоремы теории инвариантов для $n$ векторов, откуда с помощью общего тождества Капелли получается и общий случай. Согласно этой теореме, линейный базис для инвариантов от $r$ векторов с заданными степенями $e_1, \ldots, e_r$ образуют все возможные „одночлены“, т. е. все произведения компонентных определителей, содержащие аргументы $x^1, \ldots, x^r$ соответственно $e_1, \ldots, e_r$ раз. Однако эти одночлены будут, вообще говоря, связаны линейными соотношениями, устанавливаемыми второй основной теоремой. Тем не менее, она не дает возможности предсказать, сколько точно одночленов, при наличии этих соотношений, останутся линейно независимыми. Таким образом, две основные теоремы, с одной стороны, и наша теперешняя формула, — с другой стороны, являются, так сказать, известными нам концами цепи, промежуточные звенья которой остаются во мраке [14].

Производящая функция столбцов была получена из выражений (6.5) для характеров. Производящая функция строк сразу выводится из (6.12) с помощью выражений (5.15). Рассматривая $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ как $n$ вспомогательных переменных, будем для ясности пользоваться обозначением $p_f(\varepsilon)$ для симметрических функций от этих $\varepsilon$, определяемых разложением

$$\frac{1}{\prod\limits_i (1-\varepsilon_i z)} = p_0(\varepsilon) + p_1(\varepsilon) z + \ldots$$

Имеем тогда

$$D(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \cdot p_{e_1}(\varepsilon) \ldots p_{e_r}(\varepsilon) = \sum_l \mu\begin{pmatrix} e_1 \ldots e_r \\ f_1 \ldots f_n \end{pmatrix} \left| \varepsilon^{f_1+(n-1)}, \ldots, \varepsilon^{f_n} \right|,$$

и полином от неопределенных $\varepsilon$, стоящий в левой части, действительно является искомой производящей функцией строк, в том смысле, что определяемое $\mu$ служит коэффициентом этого косо-симметрического полинома при

$$\varepsilon_1^{l_1} \ldots \varepsilon_n^{l_n} \qquad (l_1 = f_1 + (n-1), \ldots, l_n = f_n + 0).$$

В последующих случаях — симплектической и ортогональной групп — мы будем рассматривать только производящие функции столбцов, опуская расположения в строки, равно как и комбинаторный способ (с неопределенными $p_f$ и последующим „правилом приведения").

Наши результаты почти без изменения применимы к группе $SL(n)$. Ограничение унимодулярными преобразованиями имеет своим следствием то, что характеры (5.15) зависят лишь от разностей чисел $f_i$, т. е. что сигнатуры вида

$$(f_1, \ldots, f_n) \quad \text{и} \quad (f_1 + e, \ldots, f_n + e)$$

должны рассматриваться как одна и та же сигнатура.

## 7. Чисто алгебраический подход

Наш окончательный результат (6.5) столь прост, что должен быть достижим более коротким путем. Укажем один такой путь, близко следующий остроумной работе Г. Фробениуса [15].

Принимая во внимание полную взаимность между $GL(n)$ и симметрической группой $\pi_f$, попытаемся определить характеры симметрической группы, которые мы будем обозначать теми же буквами, что и для $GL(n)$. Там, где понадобится их различать, мы будем в случае группы $GL(n)$ приписывать индекс $L$, а в случае группы $\pi_f$ — индекс $\pi$.

Пусть

$$a = \hat{a} = \sum p, \tag{7.1}$$

как и в главе IV, — оператор симметризации, соответствующий разбиению $f = f_1 + \ldots + f_n$. Обозначим инвариантное подпространство всех величин вида $xa$ через $\pi(f_1 \ldots f_n)$, а соответствующее представление группы $\pi_f$ — через $\langle\pi(f_1 \ldots f_n)\rangle$. Из формулы (III.7.14) мы видим, что его характер равен

$$\frac{1}{f_1! f_2! \ldots} \sum_t a(t^{-1}st) = \psi(f_1 \ldots f_n; s),$$

т. е. числу элементов $t$, для которых

$$t^{-1}st \text{ есть подстановка } p, \tag{7.2}$$

деленному на $f_1! f_2! \ldots$ Пусть разложение подстановки $s$ на взаимно простые циклы содержит $\alpha_1$ циклов длины 1, $\alpha_2$ циклов длины $2, \ldots$:

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots = f.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ характеризуют класс $\mathfrak{k}$ рассматриваемой подстановки; поэтому мы будем записывать любую функцию классов $\psi(s)$ в виде

$$\psi(s) = \psi(\mathfrak{k}) = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Уравнение (7.2) будет иметь решение $t$, если только мы можем составить из циклов подстановки $s$ строки длин $f_1, \ldots, f_n$. Пусть $\alpha_{i1}$ циклов длины 1, $\alpha_{i2}$ циклов длины $2, \ldots$ дают строку длины $f_i$. Тогда мы должны иметь

$$1\alpha_{i1} + 2\alpha_{i2} + \ldots = f_i \tag{7.3}$$

и

$$\sum_i \alpha_{i1} = \alpha_1, \quad \sum_i \alpha_{i2} = \alpha_2, \quad \ldots \tag{7.4}$$

$\alpha_1$ циклов длины 1 могут быть разбиты на группы соответственно по $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots$ циклов

$$\frac{\alpha_1!}{\alpha_{11}! \alpha_{21}! \ldots \alpha_{n1}!}$$

различными способами; и аналогично для других длин. Строка из $f_i$ индексов составится путем выписывания сперва $\alpha_{i1}$ циклов длины 1 в их естественном или вообще в каком-нибудь фиксированном порядке, затем выписывания таким же образом циклов длины 2, и т. д. $t$ будет решением уравнения (7.2), если при подстановке $t$ индексы в первой строке, длины $f_1$, переходят в индексы $1, 2, \ldots, f_1$ *в любом их порядке*, индексы во второй строке переходят в любое расположение индексов $f_1+1, \ldots, f_1+f_2$, и т. д. Поэтому число решений $t$ уравнения (7.2) равно $f_1!\,f_2!\ldots$ раз взятой сумме

$$(7.5)\qquad \sum \frac{\alpha_1!}{\alpha_{11}!\,\alpha_{21}!\ldots}\cdot\frac{\alpha_2!}{\alpha_{12}!\,\alpha_{22}!\ldots}\cdots,$$

распространенной на все неотрицательные решения $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots$ системы уравнений (7.3), (7.4). Сумма (7.5) сама является характером $\psi(f_1\ldots f_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Вводя $n$ неопределенных величин $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, мы сжато выразим наш комбинаторный результат более удобной формулой

$$(7.6)\qquad \sigma(\mathfrak{f}) = \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\ldots = \sum_{(f)} \psi(f_1\ldots f_n;\ \alpha_1\alpha_2\ldots)\,\varepsilon_1^{f_1}\ldots\varepsilon_n^{f_n},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ суть степенные суммы, составленные для величин $\varepsilon$:

$$\sigma_r = \varepsilon_1^r + \ldots + \varepsilon_n^r.$$

Наиболее важным для нас является тот факт, что коэффициенты разложений степенных произведений $\sigma(\mathfrak{f})$ по переменным $\varepsilon$ суть *характеры*.

Образуем теперь

$$(7.7)\quad \sigma(\mathfrak{f})\cdot|\varepsilon^{n-1}, \ldots, \varepsilon, 1| = \sum_{(f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n)} \omega_{f_1\ldots f_n}(\mathfrak{f})\cdot|\varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|;$$

здесь

$$(7.8)\qquad \omega_{f_1\ldots f_n} = \sum \pm\psi(l_1 - r_1, \ldots, l_n - r_n),$$

где сумма распространена знакопеременно на все перестановки $r_1, \ldots, r_n$ ряда $n-1, \ldots, 1, 0$. Подобно характерам $\psi$,

$$\omega_{f_1\ldots f_n}(\mathfrak{f}) = \omega(s)$$

есть линейная комбинация примитивных характеров $\chi, \chi', \ldots$ с целыми коэффициентами:

$$(7.9)\qquad \omega(s) = m\chi(s) + m'\chi'(s) + \ldots;$$

однако, некоторые из коэффициентов a priori могли бы быть отрицательными, что помешало бы быть характером самому $\omega$. Следующим нашим шагом будет — показать непосредственным вычислением, что величины $\omega$ удовлетворяют тем же соотношениям ортогональности, что и примитивные характеры $\chi$. Это достигается с помощью леммы Коши.

Введем новую систему переменных $z_1, \ldots, z_n$ со степенными суммами $\tau_1, \tau_2, \ldots$ и начнем с соотношения Коши (во всяком случае справедливого при $|\varepsilon_i| < 1$, $|z_l| < 1$)

$$(7.10)\quad \sum_{(l_1 > \ldots > l_r \geqslant 0)} \frac{|\varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}, \ldots, 1|} \cdot \frac{|z^{l_1}, \ldots, z^{l_n}|}{|z^{n-1}, \ldots, 1|} = \frac{1}{\prod\limits_{i,k} (1 - \varepsilon_i z_k)}.$$

Логарифм выражения $\dfrac{1}{\prod\limits_i (1 - \varepsilon_i z)}$ равен

$$(7.11)\qquad \sum_i \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i^r z^r}{r} = \frac{\sigma_1 z}{1} + \frac{\sigma_2 z^2}{2} + \ldots;$$

поэтому логарифмом правой части соотношения (7.10) служит

$$\frac{\sigma_1 \tau_1}{1} + \frac{\sigma_2 \tau_2}{2} + \ldots$$

Следовательно, совокупность членов степени $f_1 + \ldots + f_n = f$ в самом произведении есть совокупность членов этой степени в разложении функции

$$\exp\left(\frac{\sigma_1 \tau_1}{1} + \frac{\sigma_2 \tau_2}{2} + \ldots\right),$$

т. е. сумма

$$\sum \frac{\sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \ldots \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \ldots}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots \alpha_1! \, \alpha_2! \ldots},$$

распространенная на все $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, удовлетворяющие условию

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots = f.$$

Как легко видеть,

$$\frac{f!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots \alpha_1! \, \alpha_2! \ldots}$$

есть число $n(\mathfrak{k})$ элементов класса $\mathfrak{k}$. Таким образом, мы пришли к следующей форме соотношения Коши:

$$(7.12)\qquad \sum \frac{|\varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}, \ldots, 1|} \frac{|z^{l_1}, \ldots, z^{l_n}|}{|z^{n-1}, \ldots, 1|} = \frac{1}{f!} \sum_{\mathfrak{k}} n(\mathfrak{k}) \, \sigma(\mathfrak{k}) \, \tau(\mathfrak{k}),$$

где сумма в левой части распространяется на все

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0, \quad f_1 + \ldots + f_n = f,$$

а в правой части — на все классы $\mathfrak{k}$ группы $\pi_f$.

С другой стороны, умножая равенство (7.7) на соответствующее равенство, содержащее переменные $z$ вместо $\varepsilon$, находим для правой части соотношения (7.12) разложение по произведениям

$$\frac{|\varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}, \ldots, 1|} \frac{|z^{l'_1}, \ldots, z^{l'_n}|}{|z^{n-1}, \ldots, 1|},$$

с коэффициентами

$$\frac{1}{f!} \sum_{\mathfrak{k}} n(\mathfrak{k}) \omega_{f_1 \ldots f_n}(\mathfrak{k}) \omega_{f'_1 \ldots f'_n}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{M}_s \{ \omega(s) \omega'(s) \}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{M}_s \{ \omega(s) \omega'(s) \} = 1 \text{ или } 0, \tag{7.13}$$

соответственно тому, отвечают ли $\omega$ и $\omega'$ одинаковым или же различным сигнатурам $(f_1, \ldots, f_n)$.

Равенство

$$\mathfrak{M}_s \{ \omega^2(s) \} = 1$$

в соединении с равенством (7.9) и соотношениями ортогональности для примитивных характеров $\chi(s)$, $\chi'(s), \ldots$ приводит к формуле

$$m^2 + m'^2 + \ldots = 1,$$

показывающей, что либо $+\omega(s)$, либо $-\omega(s)$ должно быть примитивным характером. Сверх того, заключаем из (7.13), что $\pm\omega_{f_1 \ldots f_n}$ для различных сигнатур $(f_1, \ldots, f_n)$ являются характерами *неэквивалентных* неприводимых представлений.

Осталось доказать две вещи:

1) Для каждой сигнатуры имеет место знак $+$;

2) $\omega_{f_1 \ldots f_n}$ есть характер представления $\langle \rho(f_1 \ldots f_n) \rangle$, соответствующего разбиению $f = f_1 + \ldots + f_n$.

1) Обращением уравнений (7.8) служит

$$\psi(f_1, \ldots f_n) = \sum \mu \omega_{f'_1 \ldots f'_n} = \omega_{f_1 \ldots f_n} + \ldots \tag{7.14}$$

с теми же коэффициентами $\mu$, что и в теореме (VII.6.D). Многоточием обозначена здесь линейная комбинация членов $\omega_{f'_1 \ldots f'_n}$ ранга $(f'_1 \ldots f'_n)$, высшего чем ранг старшего члена $\omega_{f_1 \ldots f_n}$. Это равенство выражает разложение представления $\langle\pi(f_1\dots f_n)\rangle$ на его неприводимые компоненты. Из того, что $\omega_{f_1\dots f_n}$ служит здесь старшим членом, следует, что $-\omega_{f_1\dots f_n}$ не может быть характером, поскольку коэффициенты по *характерам* в (7.14) не могут быть отрицательными. Таким образом, мы приходим к двум заключениям: характером является $+\omega_{f_1\dots f_n}$ и коэффициенты $\mu \geqslant 0$.

2) В § 3 главы IV мы, между прочим, отметили [равенство (IV.3.4)], что

$$c'x\dot{a} = 0, \tag{7.15}$$

если диаграмма $T'$ ниже диаграммы $T$. Записанное в виде

$$ax\hat{c}' = 0,$$

это равенство означает, что $\langle\pi(f_1\dots f_n)\rangle$ не содержит никакого неприводимого представления $\langle\rho(f_1'\dots f_n')\rangle$ ранга низшего, чем $(f_1\dots f_n)$; но $\langle\pi(f_1\dots f_n)\rangle$ определенно содержит $\langle\rho(f_1\dots f_n)\rangle$, так как, в противоположность равенству (7.15),

$$ca = f_1!\,f_2!\dots c \neq 0.$$

Примем теперь, что наше утверждение о том, что $\omega_{f_1\dots f_n}$ есть характер представления $\langle\rho(f_1\dots f_n)\rangle$, уже доказано для всех разбиений, более высоких по рангу, чем рассматриваемое разбиение $f_1 + \dots + f_n$. Тогда формула (7.14) показывает, что характер $\omega_{f_1\dots f_n}$ должен соответствовать тому единственному $\langle\rho\rangle$, которое, наряду с частями высшего ранга, чем $(f_1\dots f_n)$, действительно является частью представления $\langle\pi(f_1\dots f_n)\rangle$, а именно — представлению $\langle\rho(f_1\dots f_n)\rangle$.

Представлением группы $GL(n)$, соответствующим представлению $\langle\pi(f_1\dots f_n)\rangle$ группы $\pi_f$, является представление, индуцируемое в пространстве всех тензоров ранга $f$ вида $aF$, так что характер группы $GL(n)$, соответствующий характеру $\psi_\pi(f_1\dots f_n)$, определяется формулой (2.16). Поэтому, перенося в левую часть равенства (7.8) все члены, стоящие в правой части со знаком минус, переходя затем к соответствующему равенству для характеров группы $GL(n)$ и, наконец, перенося указанные члены обратно, мы получим, что характером представления $\langle P(f_1\dots f_n)\rangle$ служит

$$\sum \pm p_{l_1-r_1}\cdots p_{l_n-r_n},$$

т. е. определитель (6.5). Тем самым мы пришли к нашему прежнему результату. Наряду с этим мы получили следующую простую *формулу для вычисления примитивных характеров* $\chi(f_1 \ldots f_n)$ *симметрической группы*:

**Теорема** (VII.7.A):

$$\sigma(\mathfrak{f})\,|\varepsilon^{n-1}, \ldots, 1| = \sum \chi(f_1 \ldots f_n; \mathfrak{f})\,|\varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|, \tag{7.16}$$

*где сумма в правой части распространяется на все*

$$f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0, \quad f_1 + \ldots + f_n = f.$$

Никакого более мощного инструмента для этой цели и нельзя было бы придумать; он дает $\chi(f_1 \ldots f_n; \mathfrak{f})$ в качестве коэффициента при

$$\varepsilon_1^{l_1} \ldots \varepsilon_n^{l_n} \quad (l_i = f_i + (n - i); \quad l_1 > \ldots > l_n \geqslant 0) \tag{7.17}$$

в разложении произведения

$$\sigma(\mathfrak{f}) \cdot |\varepsilon^{n-1}, \ldots, 1|.$$

Приведем два легко получаемых следствия:

1) Степень $g = g(f_1 \ldots f_n)$ представления $\langle \rho(f_1 \ldots f_n) \rangle$ является коэффициентом при $\varepsilon_1^{l_1} \ldots \varepsilon_n^{l_n}$ в разложении произведения

$$(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)^f \cdot |\varepsilon^{n-1}, \ldots, 1|.$$

Взяв во втором множителе член

$$\pm \varepsilon_1^{r_1} \ldots \varepsilon_n^{r_n},$$

где $r_1, \ldots, r_n$ — какая-нибудь перестановка ряда $n - 1, \ldots, 0$, мы должны выбрать в первом множителе член

$$\frac{f!}{(l_1 - r_1)!\,(l_2 - r_2)! \ldots}\, \varepsilon_1^{l_1 - r_1} \varepsilon_2^{l_2 - r_2} \ldots,$$

чтобы в произведении получить некую часть одночлена (7.17). Следовательно,

$$g = f!\left|\frac{1}{(l - n + 1)!}, \ldots, \frac{1}{(l - 1)!}, \frac{1}{l!}\right| = \\ = \frac{f!}{l_1! \ldots l_n!}\,|\ldots, l(l - 1), l, 1|.$$

Последний определитель есть

$$|l^{n-1}, \ldots, l, 1| = D(l_1, \ldots, l_n).$$

Отсюда:

Теорема (VII.7.B). *Степень* $g(f_1\ldots f_n)$ *неприводимого представления* $\langle\rho(f_1\ldots f_n)\rangle$ *симметрической группы* $\pi_f$ $(f=$ $=f_1+\ldots+f_n)$ *равна*

$$f!\,\frac{D(l_1,\ldots,l_n)}{l_1!\ldots l_n!},$$

*где, как всегда,*

$$l_1=f_1+(n-1),\ldots,\; l_n=f_n+0.$$

2) Допустим, что подстановка $s$ содержит цикл длины $v$ $(a_v\geqslant 1)$. Вычеркнув его, мы сведем $s$ к подстановке $f-v$ индексов, класс $\mathfrak{f}'$ которой характеризуется теми же числами $a_1$, $a_2,\ldots$, что и класс $\mathfrak{f}$ подстановки $s$, с тем исключением, что $a_v$ заменяется на $a_v-1$; отсюда имеем простое соотношение:

$$\sigma(\mathfrak{f})=\sigma(\mathfrak{f}')\cdot\sigma_v=\sigma(\mathfrak{f}')\,(\varepsilon_1^v+\ldots+\varepsilon_n^v).$$

Записывая временно правую часть соотношения (7.16) в форме

$$\sum\{l_1,\ldots,l_n\}_{\mathfrak{f}}\;\varepsilon_1^{l_1}\ldots\varepsilon_n^{l_n},$$

где сумма распространяется на все целые $l_1,\ldots,l_n$, получаем

$$\{l_1,l_2,\ldots,l_n\}_{\mathfrak{f}}=\{l_1-v,\,l_2,\ldots,l_n\}_{\mathfrak{f}'}+$$
$$+\{l_1,\,l_2-v,\ldots,l_n\}_{\mathfrak{f}'}+\ldots+\{l_1,l_2,\ldots,l_n-v\}_{\mathfrak{f}'}.$$

Даже если $l_1,\ldots,l_n$ идут в убывающем порядке:

$$l_1>l_2>\ldots>l_n\geqslant 0,$$

этого может уже не быть для некоторых из скобок в правой части, например, для

$$\{l_1,l_2-v,\ldots,l_n\}.$$

При $l_2-v=l_3$ этот член следует отбросить; при $l_2-v<l_3$ мы меняем эти два аргумента местами:

$$\{l_1,\,l_2-v,\,l_3,\ldots\}=-\{l_1,l_3,l_2-v,\ldots\},$$

и в случае необходимости повторяем этот процесс до тех пор, пока $l_2-v$ не займет надлежащего места. В случае $l_2-v<0$ оно будет вытолкнуто в конец строки, и наш член точно так же следует вычеркнуть. Переходя обратно от индексов $l$ к индексам $f$, получаем следующее правило рекуррентного вычисления характеров:

Теорема (VII.7.C). *Если класс* $\mathfrak{f}$ *содержит цикл длины* $v$, *и* $\mathfrak{f}'$ — *класс, получающийся после вычеркивания этого цикла,* *то*

$$\chi(f_1 \ldots f_n; \mathfrak{i}) = \\ = \chi(f_1 - v,\ f_2, \ldots, f_n; \mathfrak{i}') + \chi(f_1, f_2 - v, \ldots, f_n; \mathfrak{i}') + \ldots.$$

*При этом, в то время, как* $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$, *для некоторых* $\chi$ *в правой части индексы могут в одном месте отклоняться от этого их правильного порядка. К тем* $\chi(f_1 \ldots f_n)$, *в которых это происходит, надлежит применить следующее приведение:*

(1) *Если неправильность встретилась на последнем месте,* $f_n < 0$, *то* $\chi$ *следует вычеркнуть.*

(2) *Если она встретилась на более раннем месте,*

$$f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_{i-1} \geqslant f_{i+1} \geqslant \ldots \geqslant f_n, \text{ но } f_i < f_{i+1},$$

*и если при этом разрыв* $f_{i+1} - f_i = 1$, *то поступаем так же.*

(3) *Если же разрыв* $f_{i+1} - f_i \geqslant 2$, *то заменяем*

$$\chi(\ldots, f_i, f_{i+1}, \ldots) \text{ на } -\chi(\ldots, f_{i+1} - 1,\ f_i + 1, \ldots)$$

($f_i$ увеличивается на 1, $f_{i+1}$ уменьшается на 1, и порядок обращается). *Этим неправильность либо устраняется, либо сдвигается на следующее место (и притом с меньшим разрывом).*

Это правило часто применялось прежде для $v = 1$. В частности, имеет место рекуррентное равенство

$$g(f_1, f_2, \ldots) = \\ = g(f_1 - 1, f_2, \ldots) + g(f_1, f_2 - 1, \ldots) + \ldots, \tag{7.18}$$

где в правой части следует вычеркнуть члены, аргументы которых не сохраняют правильного порядка. Общее правило лишь недавно было указано профессором Ф. Д. Мурнаганом [16], обнаружившим, что оно весьма полезно для фактического вычисления характеров.

Умножая (7.16) на

$$n(\mathfrak{i}) \cdot \chi(f_1 \ldots f_n; \mathfrak{i}),$$

суммируя по $\mathfrak{i}$ и используя соотношения ортогональности для характеров $\chi$, приходим к равенству

$$\frac{|\varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}, \ldots, 1|} = \frac{1}{f!} \sum_{\mathfrak{i}} n(\mathfrak{i})\, \sigma(\mathfrak{i})\, \chi_\pi(f_1 \ldots f_n; \mathfrak{i}).$$

В левой части мы имеем характер $\chi_L(f_1 \ldots f_n)$ группы $GL(n)$. Эта связь,

$$\chi_L = \frac{1}{f!} \sum n(\mathfrak{i})\, \sigma(\mathfrak{i})\, \chi_\pi(\mathfrak{i}), \tag{7.19}$$

очевидно, переносится с неприводимых представлений на любые их линейные комбинации, а значит на *все* представления вообще. И действительно, она является не чем иным, как выражением в терминах характеров общего закона взаимности, рассмотренного в разделе В главы III. Этим путем равенство (7.19) может быть, как это было выполнено автором [17], непосредственно установлено с помощью тех же комбинатóрных рассмотрений, которые привели к равенству Фробениуса (7.6). Частным случаем является равенство

$$p_f = \frac{1}{f!}\sum n(\mathfrak{f})\,\sigma(\mathfrak{f}) = \sum \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots}\left(\frac{\sigma_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^{\alpha_2}\ldots$$

$$(1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots = f),$$

которое можно также вывести из (7.11):

$$\sum_{f=0}^{\infty} p_f z^f = \frac{1}{\prod\limits_i (1-\varepsilon_i z)} = \exp\left(\frac{\sigma_1 z^1}{1} + \frac{\sigma_2 z^2}{2} + \ldots\right).$$

Рассматривая одну лишь симметрическую группу, можно было бы с известным преимуществом придать всему этому исследованию следующий оборот [18]. С помощью независимых переменных $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ сопоставляем с классом $\mathfrak{f}$, подстановки которого состоят из $\alpha_1$ циклов длины 1, $\alpha_2$ циклов длины 2, . . , одночлен

$$\sigma(\mathfrak{f}) = \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\ldots$$

С каждым характером $\chi(\mathfrak{f})$ симметрической группы сопоставляем следующий полином $\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ от переменных $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, называемый по Шуру *характеристикой*:

$$\Psi(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots) = \frac{1}{f!}\sum_{\mathfrak{f}} n(\mathfrak{f})\,\chi(\mathfrak{f})\,\sigma(\mathfrak{f}).$$

Характеристику представления $s \longrightarrow 1$, характером которого служит $\chi(\mathfrak{f}) = 1$, обозначим через $p_f$:

$$p_f = \frac{1}{f!}\sum n(\mathfrak{f})\,\sigma(\mathfrak{f}).$$

Введение характеристик можно было бы формально оправдать тем замечанием, что произведение двух характеристик групп $\pi_f$ и $\pi_{f'}$ является некоторой характеристикой группы $\pi_{f+f'}$. Это утверждение заменяет комбинаторное рассуждение, с помощью которого мы вывели формулу Фробениуса (7.6), и доказывается аналогичным способом. [Для нас, посвященных, знающих, что характеристика есть соответствующий характер группы $GL(n)$, все это в достаточной степени очевидно.] Поэтому произведения

$$p_{f_1} p_{f_2} \ldots,$$

сопоставляемые с произвольными разбиениями $f = f_1 + f_2 + \ldots \ldots + f_r$, являются характеристиками; и то же верно для определителей

$$|p_{l-(r-1)}, \ldots, p_{l-1}, p_l| = \frac{1}{f!} \sum_{\mathfrak{f}} n(\mathfrak{f}) \chi(f_1 \ldots f_r;\ \mathfrak{f}) \sigma(\mathfrak{f})$$

$$(l_1 = f_1 + (r-1), \ \ldots, \ l_r = f_r + 0),$$

а их коэффициенты $\chi(\mathfrak{f})$ суть характеры, по крайней мере в расширенном, фробениусовском смысле, т. е. линейные комбинации примитивных характеров с целыми, но не обязательно положительными, коэффициентами. С помощью соотношений ортогональности и надлежащей формы леммы Коши убеждаемся в том, что $\chi(f_1 \ldots f_r;\ \mathfrak{f})$ сами являются примитивными характерами.

Отсутствие числа $n$, чуждого симметрической группе $\pi_f$, можно считать преимуществом этого способа. Однако, какую бы редакцию ни придать этой теории, она всегда зависит от трех моментов, а именно, от типичных комбинаторных рассмотрений, леммы Коши и соотношений ортогональности. И при этом определитель появляется неизвестно откуда, как *deus ex machina* („бог из машины"). Не так обстоит дело в аналитическом методе, где $\Delta$ возникает из элемента объема унитарной группы. Таким образом, отдав дань уважения алгебраическим проверкам в различных их видах, я остаюсь убежденным, в противоречие со всеми пуританскими доктринами, что аналитический метод является наименее искусственным, дозволяющим наиболее глубокое проникновение, и лучшим в проведении нашей программы: решать конкретные проблемы с помощью общих методов, проливающих свет на гораздо более широкую область математических фактов, чем нужно для нашей непосредственной цели. Наиболее выдающимся преимуществом нашего аналитического способа является то, что его можно непосредственно обобщить на симплектическую и ортогональную группы.

## 8. Характеры симплектической группы

Для симплектической группы $Sp(n)$ размерность $n$ четная, $n = 2\nu$. Векторные компоненты мы будем обозначать через

$$x_1,\ x_1',\ x_2,\ x_2',\ \ldots,\ x_\nu,\ x_\nu'.$$

Лемма (VII.1.A) оправдывает ограничение *унитарными* симплектическими преобразованиями, которые образуют группу $USp(n)$. Аналогично теореме (VII.1.C) имеем:

Теорема (VII.8.A). *В $USp(n)$ каждый элемент $A$ является сопряженным к некоторому диагональному элементу с компонентами*

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_1',\ \ldots,\ \varepsilon_\nu,\ \varepsilon_\nu', \tag{8.1}$$

*где* $|\varepsilon_i| = 1$ *и* $\varepsilon_i' = \frac{1}{\varepsilon_i} = \bar{\varepsilon}_i$ $(i = 1, \ldots, \nu)$.

Доказательство. Из теории унитарных матриц мы знаем, что корни $\varepsilon$ характеристического уравнения

$$|\lambda E - A| = 0$$

равны по абсолютной величине единице и что собственные пространства $P(\varepsilon)$, состоящие из всех векторов $x$, удовлетворяющих уравнению

$$\varepsilon x = Ax, \tag{8.2}$$

унитарно перпендикулярны друг к другу для численно различных корней и образуют в сумме все пространство $P$. Каждому вектору $x$ соответствует вектор, обозначенный в § 2 главы VI через $\tilde{x}$, и из уравнения (8.2) следует

$$\bar{\varepsilon}\tilde{x} = A\tilde{x}.$$

Мы теперь специальным образом определим базис в каждом $P(\varepsilon)$, причем будем различать два случая:

1) $\varepsilon \neq \pm 1$. В $P(\varepsilon)$, как и прежде, выбираем произвольный унитарно ортогональный базис $e_1, \ldots, e_\mu$. Векторы $\tilde{x}$, соответствующие векторам $x$ из $P(\varepsilon)$, образуют собственное пространство $P(\bar{\varepsilon})$, и за его базис мы выбираем

$$e_1' = \tilde{e}_1,\ \ldots,\ e_\mu' = \tilde{e}_\mu.$$

Собственные значения $\varepsilon \neq \pm 1$ встречаются парами $\varepsilon$, $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$ одинаковой кратности, и указанное сейчас построение выполняется независимо для каждой из этих пар.

2) $\varepsilon = \pm 1$. Случай $\varepsilon = -1$ рассматривался в § 2 главы VI, где нам удалось построить базис для $P(-1)$, являющийся одновременно унитарно ортогональным и симплектическим. То же построение проходит и для $\varepsilon = +1$.

Объединяя построенные так базисы различных собственных пространств, мы получим базис всего $n$-мерного пространства, являющийся одновременно унитарно ортогональным и симплектическим. В этой системе координат наше преобразование примет диагональный вид с компонентами (8.1).

Положим

$$\varepsilon_i = e(\varphi_i),\ \bar{\varepsilon}_i = e(-\varphi_i) \qquad (i=1,\ \ldots,\ \nu),$$

и назовем снова $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ углами преобразования $A$. С точностью до нумерации и знаков они однозначно определены по модулю 1. Введем обозначение

$$c(\varphi) = e(\varphi) + e(-\varphi), \qquad s(\varphi) = e(\varphi) - e(-\varphi).$$

Теорема (VII.8.B). *Объем той части группы $USp(n)$, у элементов которой углы заключены в бесконечно близких пределах*

$$(\varphi_1,\ \varphi_1 + d\varphi_1),\ \ldots,\ (\varphi_\nu,\ \varphi_\nu + d\varphi_\nu),$$

*дается выражением*

$$\Delta\bar{\Delta}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_\nu,$$

*где*

(8.3) $$\Delta = \prod_i s(\varphi_i) \cdot \prod_{i<k} \{c(\varphi_i) - c(\varphi_k)\} \qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ \nu).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы (VII.4.C).

Каждый характер группы $USp(n)$ является функцией классов и, значит, периодической функцией углов $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ с периодом 1 по каждому аргументу, инвариантной относительно „октаэдральной“ группы $Q_\nu$ порядка $2^\nu \cdot \nu!$, состоящей из всевозможных подстановок аргументов $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$, соединенных с произвольными распределениями знаков. $\Delta$ антисимметрично относительно этой группы. Простейшими антисимметрическими функциями являются элементарные суммы

$$\xi(l_1 \ldots l_\nu) = \sum \pm e(l_1\varphi_1 + \ldots + l_\nu\varphi_\nu),$$

где коэффициенты $l$ суть целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$l_1 > l_2 > \ldots > l_\nu > 0,$$

а сумма распространяется знакопеременно на группу $Q_\nu$. Имеем:

$$\xi(l_1 \ldots l_\nu) = |s(l_1\varphi),\ \ldots,\ s(l_\nu\varphi)|.$$

$\Delta$ является самой низкой по рангу из этих сумм:

(8.4) $$\Delta = \xi(l_1^0 \ldots l_\nu^0),\quad l_1^0 = \nu,\quad l_2^0 = \nu - 1,\ \ldots,\ l_\nu^0 = 1.$$

Теорема (VII.8.C). *Каждый примитивный характер* $\chi(f_1\dots f_\nu)$ *группы* $USp(n)$ *является дробью с числителем*

$$\xi(l_1\dots l_\nu)=|\varepsilon^{l_1}-\varepsilon^{-l_1},\ \dots,\ \varepsilon^{l_\nu}-\varepsilon^{-l_\nu}| \tag{8.5}$$

*и знаменателем* $\xi(\nu,\ \nu-1,\ \dots,\ 1)$.

Старшим членом в $\chi(f_1\dots f_\nu)$ является $\varepsilon_1^{l_1}\dots\varepsilon_\nu^{l_\nu}$, где

$$l_1-l_1^0=f_1,\ \dots,\ l_\nu-l_\nu^0=f_\nu.$$

Степень определяем, полагая сперва

$$\varphi_1=\nu\varphi,\ \varphi_2=(\nu-1)\varphi,\ \dots,\ \varphi_\nu=1\varphi,$$

в результате чего числитель (8.5) принимает вид

$$\prod_i s(l_i\varphi)\cdot\prod_{i<k}\{c(l_i\varphi)-c(l_k\varphi)\},$$

и переходя затем к пределу по $\varphi\to0$:

$$N(f_1\dots f_\nu)=\frac{P(l_1\dots l_\nu)}{P(l_1^0\dots l_\nu^0)},$$

$$P(l_1\dots l_\nu)=\prod_i l_i\cdot\prod_{i<k}(l_i-l_k)(l_i+l_k).$$

Сопоставление с алгебраическим построением, проведенным в главе V, показывает, что (8.5) соответствует линейному пространству $\mathrm{P}_0$ $(f_1\dots f_\nu)$, выделенному из $\mathrm{P}_f^0$ $(f=f_1+\dots+f_\nu)$ диаграммой симметрии $T(f_1\dots f_\nu)$.

Теорема (VII.8.D). *Представления* $\langle\mathrm{P}_0(f_1\dots f_\nu)\rangle$, *где* $f_1,\ \dots,\ f_\nu$ *принимают все целые значения, подчиненные условиям* $f_1\geqslant\dots\geqslant f_\nu\geqslant0$, *образуют полную систему неэквивалентных непрерывных неприводимых представлений унитарной симплектической группы.*

Запишем формулу леммы Коши в виде

$$\left|\frac{1}{x_i-y_k}\right|=\frac{|1,\ \dots,\ x^{\nu-1}|\,|y^{\nu-1},\ \dots,\ 1|}{\prod(x_i-y_k)}\qquad(i,\ k=1,\ \dots,\ \nu)$$

и положим теперь

$$x_i=z_i+\frac{1}{z_i},\qquad y_i=\varepsilon_i+\frac{1}{\varepsilon_i}.$$

Тогда

$$x_i-y_k=\frac{1}{z}(1-\varepsilon z)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}z\right)\ \text{для}\ z=z_i,\ \varepsilon=\varepsilon_k.$$

Получаем:

$$\left|\frac{1}{(1-\varepsilon_k z_l)(1-\varepsilon_k^{-1} z_l)}\right| = \frac{|\varepsilon^{\nu-1}+\varepsilon^{-(\nu-1)}, \ldots, 1|\,|z^{\nu-1}, z^{\nu-2}+z^{\nu}, \ldots, 1+z^{2\nu-2}|}{\Pi(1-\varepsilon_k z_l)(1-\varepsilon_k^{-1} z_l)}.$$

Но

$$\frac{1}{(1-\varepsilon z)(1-\varepsilon^{-1} z)} = \sum_{l=1}^{\infty}\{\varepsilon^{l-1}+\varepsilon^{l-3}+\ldots+\varepsilon^{-(l-1)}\} z^{l-1} = \\ = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{l}-\varepsilon^{-l}}{\varepsilon-\varepsilon^{-1}} z^{l-1}.$$

Поэтому, пользуясь сокращенными обозначениями (8.4) и

$$\varphi(z) = \prod_k (1-\varepsilon_k z)(1-\varepsilon_k^{-1} z) = |E - zA|,$$

имеем:

$$\frac{\Delta \cdot |z^{\nu-1}, \ldots, 1+z^{2\nu-2}|}{\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_\nu)} = \sum |\varepsilon^{l_1}-\varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_\nu}-\varepsilon^{-l_\nu}| z_1^{l_1-1}\ldots z_\nu^{l_\nu-1}.$$

Вводя снова с помощью формулы (6.4) величины $p_f$, видим, что характер $\chi(f_1\ldots f_\nu)$ равен коэффициенту при $z_1^{l_1-1}\ldots z_\nu^{l_\nu-1}$ в выражении

$$\frac{|z^{\nu-1}, z^{\nu-2}+z^{\nu}, \ldots, 1+z^{2\nu-2}|}{\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_\nu)},$$

т. е. определителю

$$|p_{l-\nu}, p_{l-\nu+1}+p_{l-\nu-1}, \ldots, p_{l-1}+p_{l-2\nu+1}|.$$

Теперь мы можем сбросить унитарные оковы. Желая притти к однородным обозначениям для $GL(n)$ и $Sp(n)$, заменим здесь символ $l$ на $l+1$.

Теорема (VII.8.E). *Характером неприводимого представления* $\langle P_0(f_1\ldots f_\nu)\rangle$ *симплектической группы служит*

(8.6) $\chi(f_1\ldots f_\nu) = |p_{l-\nu+1}, p_{l-\nu+2}+p_{l-\nu}, \ldots, p_l+p_{l-2\nu+2}|$,

*где* $p_f$ — *функции произвольного симплектического преобразования* $A$, *определяемые формулой*

$$\frac{1}{|E-zA|} = \sum p_f z^f,$$

*а*

(8.7) $l_1 = f_1+(\nu-1), \ldots, l_\nu = f_\nu + 0.$

В процессе всего этого стремительного продвижения мы нигде не натолкнулись ни на малейшую помеху [19].

Характеристический полином

$$\varphi(z)=|E-zA|$$

симплектического преобразования $A$:

$$A^*IA=I,$$

где $I$ — матрица, введенная на стр. 229, обладает свойством

$$z^n\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi(z). \tag{8.8}$$

Действительно. из

$$(E-zA^*)IA=I(A-zE)$$

следует

$$|E-zA^*|=|A-zE| \text{ или } |E-zA|=|zE-A|,$$

так как $|A|=1$. Положим

$$\psi_r(z)=\begin{cases}\varphi(z) & \text{для } r=\nu \\ [1+z^{2(r-\nu)}]\varphi(z) & \text{для } r>\nu.\end{cases}$$

Полином $\psi_r$ степени $2r$ удовлетворяет аналогичному (8.8) уравнению

$$z^{2r}\psi_r\left(\frac{1}{z}\right)=\psi_r(z)$$

и, следовательно, имеет вид

$$c_0(1+z^{2r})+c_1(z+z^{2r-1})+\ldots+c_rz^r \qquad (c_0=1). \tag{8.9}$$

Поэтому функция

$$H(z_1, \ldots, z_r)=\frac{\nabla(z_1, \ldots, z_r)}{\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_r)},$$

где

$$\nabla(z_1, \ldots, z_r)=|z^{r-1}, z^{r-2}+z^r, \ldots, 1+z^{2(r-1)}| \tag{8.10}$$

будет удовлетворять, при $r\geqslant\nu$, рекуррентному уравнению

$$H(z_1, \ldots, z_{r+1})=H(z_1, \ldots, z_r)z_1\ldots z_r\{1+z_{r+1}^{2(r-\nu)}\}+\ldots,$$

где множитель $1+z_{r+1}^{2(r-\nu)}$ в случае наименьшего $r$. т. е. $r=\nu$, следует заменить на 1. Кроме того,

$$\begin{aligned}H(z_1, \ldots, z_\nu)&=\sum z_1^{l_1}\ldots z_\nu^{l_\nu}|p_{l-(\nu-1)}, \ldots, p_l+p_{l-2(\nu-1)}|=\\&=\sum_{(f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant0)}|z^{f_1+(\nu-1)}, \ldots, z^{f_\nu}|\chi(f_1\ldots f_\nu).\end{aligned}$$

Поэтому, путем индукции по $r$, начинающейся от $r=\nu$, получаем:

$$H(z_1, \ldots, z_r)=\sum_{(f)} L_{f_1\ldots f_\nu}(z_1, \ldots, z_r)\chi(f_1 \ldots f_\nu),$$

где

(8.11)
$$L_{f_1\ldots f_\nu}(z_1, \ldots, z_\nu)= \\ =|z^{f_1+(r-1)}, \ldots, z^{f_\nu+(r-\nu)} \vdots z^{r-\nu-1}, z^{r-\nu-2}+ \\ +z^{r-\nu}, \ldots, 1+z^{2(r-\nu-1)}|.$$

Определитель

$$\nabla=(z_1 \ldots z_r)^{r-1}|1, z+z^{-1}, \ldots, z^{r-1}+z^{-r+1}|$$

есть разностное произведение величин $z_i+z_i^{-1}$, умноженное на $(z_1 \ldots z_r)^{r-1}$. Так как

$$(z_k+z_k^{-1})-(z_i+z_i^{-1})=(z_i-z_k)\left(\frac{1}{z_i z_k}-1\right)=\frac{(z_i-z_k)(1-z_i z_k)}{z_i z_k},$$

то получаем:

$$\nabla(z_1, \ldots, z_r)=D(z_1, \ldots, z_r)\prod_{i<k}(1-z_i z_k).$$

Удобно ввести вспомогательные *полиномы*

(8.12)
$$\frac{L_{f_1\ldots f_\nu}(z_1, \ldots, z_r)}{D(z_1, \ldots, z_r)}=\Lambda_{f_1\ldots f_\nu}(z).$$

Тогда полученный нами результат можно сформулировать следующим образом:

Теорема (VII.8.F). *Производящие функции*

$$\Phi_{f_1\ldots f_\nu}(z)=\frac{\Lambda_{f_1\ldots f_\nu}(z)}{\prod\limits_{i<k}(1-z_i z_k)}= \qquad (i, k=1, \ldots, r) \\ =\sum \mu\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_r \\ f_1 & \ldots & f_\nu \end{pmatrix} z_1^{e_1} \ldots z_r^{e_r},$$

*определяемые формулами* (8.11), (8.12), *с одной стороны, описывают разложение представления* $\langle\Sigma(e_1 \ldots e_r)\rangle$ *на неприводимые части* $\langle \mathrm{P}_0(f_1 \ldots f_\nu)\rangle$:

$$\langle\sum(e_1 \ldots e_r)\rangle \sim \sum_{(f)} \mu\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_r \\ f_1 & \ldots & f_\nu \end{pmatrix}\langle \mathrm{P}_0(f_1 \ldots f_\nu)\rangle,$$

*а с другой — определяют число независимых ковариантов предписанного типа* $\langle \mathrm{P}_0(f_1 \ldots f_\nu)\rangle$, *зависящих от* $r$ *векторных аргументов в произвольных степенях* $e_1, \ldots, e_r$.

Невозможно сконцентрировать в более стройном виде все богатство информации, содержащейся в этой формуле. Для $f_1 = \ldots = f_r = 0$ она дает числа линейно независимых *векторных инвариантов*. Вплоть до $r = 2\nu$ числитель $L_{00\ldots0}$ допускает упрощенное выражение

$$|z^{r-1}, \ldots, z^{\nu} \,\vdots\, z^{\nu-1}, \ldots, 1|;$$

поэтому для $r = n$,

$$\Phi_{0\ldots0}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{\prod\limits_{i<k}(1 - z_i z_k)} \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{8.13}$$

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ суть $n$ векторных аргументов и $[x^i x^k]$ $(i < k)$ их $\frac{1}{2}n(n-1)$ косых произведений. Формула (8.13) показывает, что линейно независимых инвариантов имеется столько же, сколько и „одночленов"

$$\prod_{i<k}[x_i x_k]^{e_{ik}} \qquad (e_{ki} = e_{ik}) \tag{8.14}$$

предписанных степеней $e_i$, $e_i \doteq \sum\limits_k e_{ik}$. Это, разумеется, находится в полном согласии с утверждениями первой и второй основных теорем, что все инварианты могут быть выражены через косые произведения и что между косыми произведениями $n$ векторов нет никаких алгебраических соотношений. Приняв любое из этих двух предложений, мы получили бы с помощью нашей формулы и другое. Мы видим теперь, что означает знаменатель $\prod\limits_{i<k}(1 - z_i z_k)$ в наших формулах; им учитывается тот очевидный факт, что умножение любого коварианта на произвольный одночлен (8.14) приводит снова к коварианту того же типа.

Раньше мы придерживались способа спуска от $GL(n)$ к подгруппе $Sp(n)$ уже после того, как представление $\langle\Sigma(e_1 \ldots e_r)\rangle$ разложено на его неприводимые составляющие $\langle\mathrm{P}(e_1 \ldots e_n)\rangle$ при режиме нашей линейной группы:

$$\langle\mathrm{P}(e_1 \ldots e_n)\rangle \sim \sum_{(f)} \mu^* \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ f_1 & \ldots & f_\nu \end{pmatrix} \langle\mathrm{P}_0(f_1 \ldots f_\nu)\rangle. \tag{8.15}$$

Рассматривая предыдущие соотношения

$$\frac{D(z_1, \ldots, z_n)}{\varphi(z_1) \ldots \varphi(z_n)} = \sum_{(e)} |z^{e_1+(n-1)}, \ldots, z^{e_n}| \, \chi(e_1 \ldots e_n) =$$

$$= \sum_{(f)} \frac{L_{f_1 \ldots f_\nu}(z_1, \ldots, z_n)}{\prod\limits_{i<k}(1 - z_i z_k)} \chi^S(f_1 \ldots f_\nu),$$

где $\chi$ и $\chi^S$ обозначают, соответственно, характеры групп $GL(n)$ и $Sp(n)$, приходим к следующей формуле:

Теорема (VII.8.G). *Ряд Тейлора для*

$$\frac{L_{f_1 \ldots f_\nu}(z_1, \ldots, z_n)}{\prod\limits_{i<k}(1 - z_i z_k)} \qquad (i,\ k = 1, \ldots, n) \tag{8.16}$$

*косо-симметричен по n переменным* $z_1, \ldots, z_n$ *и может быть поэтому записан в виде*

$$\sum_{(e_1 \geq \ldots \geq e_n \geq 0)} \mu^* \begin{pmatrix} e_1 \ldots e_n \\ f_1 \ldots f_\nu \end{pmatrix} | z^{e_1 + (n-1)}, \ \ldots, \ z^{e_n} |.$$

*Как производящая функция в этом смысле,* (8.16) *выражает кратности* $\mu^*$, (8.15), *с которыми входят в* $\langle \mathrm{P}(e_1 \ldots e_n) \rangle$ *неприводимые части* $\langle \mathrm{P}_0(f_1 \ldots f_\nu) \rangle$.

## 9. Характеры ортогональной группы

Мы не без умысла предоставили на этот раз симплектической группе первенство перед ортогональной. Для последней положение значительно усложняется различием между собственно и несобственно ортогональными подстановками [20]. Для аналитического исследования оказывается удобным разделить случаи нечетной и четной размерностей, $n = 2\nu + 1$ и $n = 2\nu$, и в качестве основной квадратичной формы, лево-инвариантной относительно ортогональных преобразований, принять

$$\begin{cases} 2(x_1 x_1' + \ldots + x_\nu x_\nu') + x_0^2 & (\text{для } \ n = 2\nu + 1), \\ 2(x_1 x_1' + \ldots + x_\nu x_\nu') & (\text{для } \ n = 2\nu), \end{cases} \tag{9.1}$$

а не

$$(x_1^2 + x_1'^2) + \ldots + (x_\nu^2 + x_\nu'^2) \{+ x_0\}. \tag{9.2}$$

Так как формы (9.1) и (9.2) переходят одна в другую с помощью подстановки

$$x_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k + i x_k'), \qquad x_k' \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k - i x_k') \qquad (k = 1, \ \ldots, \ \nu),$$

которая сама унитарна, то группа $UO(n)$ унитарных преобразований, оставляющих инвариантной форму (9.1), эквивалентна группе унитарных, т. е. вещественных преобразований с инвариантной формой (9.2), переходя в последнюю группу посредством трансформации указанной подстановкой. При основной форме (9.1) скалярное произведение двух векторов $x$, $y$ равно

$$(xy) = (x_1 y_1' + x_1' y_1) + \ldots + (x_\nu y_\nu' + x_\nu' y_\nu)\{+x_0 y_0\},$$

и тем самым все наше рассмотрение становится по форме более похожим на рассмотрение симплектической группы с инвариантным косым произведением

$$[xy] = (x_1 y_1' - x_1' y_1) + \ldots + (x_\nu y_\nu' - x_\nu' y_\nu).$$

Несобственно ортогональное преобразование $J_n$, использованное нами в главе V для разбиения $O(n)$ на $O^+(n)$ и ее смежный класс $O^-(n)$, будет теперь определяться так:

$$(9.3)\quad \begin{cases} x_1 \to x_1,\ x_1' \to x_1';\ \ldots;\ x_\nu \to x_\nu,\ x_\nu' \to x_\nu'; & \\ x_0 \to -x_0 & (n = 2\nu+1); \\ x_1 \to x_1,\ x_1' \to x_1';\ \ldots;\ x_{\nu-1} \to x_{\nu-1}, & \\ x_{\nu-1}' \to x_{\nu-1}';\ x_\nu \to x_\nu',\ x_\nu' \to x_\nu & (n = 2\nu). \end{cases}$$

Рассмотрим сперва нечетный случай $n = 2\nu + 1$; способ, который мы применим, потребует лишь небольшой модификации при переходе после этого к четному случаю. В $UO(n)$ каждый собственный или несобственный элемент сопряжен, соответственно, некоторому диагональному элементу

$$(9.4)\quad x_1 \to \varepsilon_1 x_1,\ x_1' \to \varepsilon_1' x_1',\ \ldots,\ x_\nu \to \varepsilon_\nu x_\nu,\ x_\nu' \to \varepsilon_\nu' x_\nu',\ x_0 \to \pm x_0,$$

где $\varepsilon_i' = \bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{\varepsilon_i}$. Введем $\nu$ углов $\varphi_i$ формулами $\varepsilon_i = e(\varphi_i)$. Каждая функция классов и, в частности, каждый характер $\chi$ будет тогда периодической функцией $\chi_+(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)$ на собственной и другой периодической функцией $\chi_-(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)$ на несобственной части, в обоих случаях инвариантной относительно октаэдральной группы $Q = Q_\nu$ порядка $2^\nu \nu!$. Диагональные элементы вида (9.4) образуют коммутативную группу, и, следовательно, мы можем привести изображающие их в заданном представлении матрицы одновременно к диагональному виду. Как мы знаем, для собственных элементов матрица будет состоять из $N$ членов

$$E_K^+ = e(m_1\varphi_1 + \ldots + m_\nu\varphi_\nu)$$

по диагонали. Пусть несобственный элемент $J_n$, (9.3), представлен диагональной матрицей $\{a_K\}$; вследствие равенства $J_n^2 = E$ получаем:

$$a_K^2 = 1, \qquad a_K = \pm 1,$$

а тогда для несобственного элемента (9.4) имеем:

$$E_K^- = a_K e(m_1\varphi_1 + \dots + m_\nu\varphi_\nu).$$

Поэтому $\chi_+ = \sum E_K^+$ и $\chi_- = \sum E_K^-$ являются конечными рядами Фурье с целыми коэффициентами:

$$(9.5)\qquad \begin{cases} \chi_+ = \sum k^+_{m_1\dots m_\nu} e(m_1\varphi_1 + \dots + m_\nu\varphi_\nu), \\ \chi_- = \sum k^-_{m_1\dots m_\nu} e(m_1\varphi_1 + \dots + m_\nu\varphi_\nu). \end{cases}$$

Коэффициенты $k^+$ неотрицательны, а коэффициенты $k^-$ удовлетворяют условиям

$$(9.6)\qquad |k^-_{m_1\dots m_\nu}| \leqslant k^+_{m_1\dots m_\nu}, \qquad k^-_{m_1\dots m_\nu} \equiv k^+_{m_1\dots m_\nu} \pmod 2.$$

Для относительной плотности классов находим на собственной и несобственной частях, соответственно, выражения $\Delta^+\overline{\Delta^+}$ и $\Delta^-\overline{\Delta^-}$, где

$$(9.7)\qquad \begin{cases} \Delta^+ = \prod\limits_l s\left(\frac{\varphi_l}{2}\right) \cdot \prod\limits_{i<k} \{c(\varphi_i) - c(\varphi_k)\} \\ \Delta^- = \prod\limits_l c\left(\frac{\varphi_l}{2}\right) \cdot \prod\limits_{i<k} \{c(\varphi_i) - c(\varphi_k)\}. \end{cases}$$

Эти функции двузначны так, что когда один из углов $\varphi_l$ описывает полный оборот, а остальные остаются фиксированными, $\Delta$ непрерывно переходит в $-\Delta$. $\xi^+ = \Delta^+\chi^+$ и $\xi^- = \Delta^-\chi^-$ являются конечными рядами Фурье с целыми коэффициентами, в том модифицированном смысле, что показатели $m_1, \dots, m_\nu$ общего члена $e(m_1\varphi_1 + \dots + m_\nu\varphi_\nu)$ берутся из последовательности „полуцелых“ чисел

$$\dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots,$$

а не из последовательности целых чисел

$$\dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому указанные конечные ряды являются линейными комбинациями с целыми коэффициентами элементарных сумм

$$\xi^+(l_1 \dots l_\nu) = \sum \pm e(l_1\varphi_1 + \dots + l_\nu\varphi_\nu),$$
$$\xi^-(l_1 \dots l_\nu) = \sum \pm e(l_1\varphi_1 + \dots + l_\nu\varphi_\nu),$$

где в $\xi^+$ сумма распространена знакопеременно на $Q_\nu$, тогда как в $\xi^-$ сумма распространена знакопеременно по подстановкам, но при этом с учетом четности или нечетности числа обращений знаков; показатели же $l$ — полуцелые числа, удовлетворяющие условию $l_1 > l_2 > \ldots > l_\nu > 0$:

$$(9.8^+) \qquad \xi^+(l_1 \ldots l_\nu) = |\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_\nu} - \varepsilon^{-l_\nu}| = |s(l_1\varphi), \ldots, s(l_\nu\varphi)|,$$

$$(9.8^-) \qquad \xi^-(l_1 \ldots l_\nu) = |\varepsilon^{l_1} + \varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_\nu} + \varepsilon^{-l_\nu}| = |c(l_1\varphi), \ldots, c(l_\nu\varphi)|.$$

$\Delta^+$ и $\Delta^-$ суть, соответственно, $\xi^+$ и $\xi^-$ наинизшего ранга с

$$l_1^0 = \nu - \frac{1}{2}, \ldots, l_\nu^0 = \frac{1}{2}.$$

Располагая члены в лексикографическом порядке, мы должны иметь

$$\xi^+ = c_+\xi^+(l_1 \ldots l_\nu) + \ldots,$$
$$\xi^- = c_-\xi^-(l_1 \ldots l_\nu) + \ldots,$$

где

$$(9.9) \qquad c_+ > 0, \qquad c_- \equiv c_+ \pmod 2, \qquad |c_-| \leqslant c_+.$$

Обозначая через $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^+$, $\mathfrak{M}^-$, соответственно, средние значения по всей группе, по ее собственной части и по ее несобственной части, имеем:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}^+ + \mathfrak{M}^-).$$

Если характер $\chi$ примитивен, то его среднее квадратичное $\mathfrak{M}|\chi|^2$ равно 1, откуда

$$\frac{1}{2}(c_+^2 + c_-^2) + \ldots = 1,$$

что вследствие (9.9) оставляет лишь две возможности: либо

$$(9.10) \qquad \chi^+ = \frac{\xi^+(l_1 \ldots l_\nu)}{\xi^+(l_1^0 \ldots l_\nu^0)}, \qquad \chi^- = \frac{\xi^-(l_1 \ldots l_\nu)}{\xi^-(l_1^0 \ldots l_\nu^0)},$$

либо

$$(9.11) \qquad \chi^+ = \frac{\xi^+(l_1 \ldots l_\nu)}{\xi^+(l_1^0 \ldots l_\nu^0)}, \qquad \chi^- = -\frac{\xi^-(l_1 \ldots l_\nu)}{\xi^-(l_1^0 \ldots l_\nu^0)}.$$

Старшим членом в (9.10) как для $\chi^+$, так и для $\chi^-$, служит

$$(9.12) \qquad \varepsilon_1^{f_1} \ldots \varepsilon_\nu^{f_\nu} \qquad (f_i = l_i - l_i^0),$$

тогда как в (9.11) старшими членами являются

$$+\varepsilon_1^{f_1}\ldots\varepsilon_\nu^{f_\nu} \text{ для } \chi^+, \qquad -\varepsilon_1^{f_1}\ldots\varepsilon_\nu^{f_\nu} \text{ для } \chi^-.$$

Этого достаточно для сопоставления с алгебраической конструкцией из § 7 главы V, которую мы должны приспособить к новому виду (9.1) основной квадратичной формы. Это легкое изменение — лишь к лучшему: для схемы $T$ с $m \leqslant \nu$ строками длин

$$f_1, \ldots, f_m \qquad (f_{m+1} = \ldots = f_\nu = 0)$$

единственной линейно независимой компонентой общих тензоров в $\mathrm{P}_0(f_1\ldots f_\nu)$ с наивысшим весом является теперь

$$F\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots \\ 2 & 2 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m & m & \ldots \end{pmatrix},$$

и этот вес есть (9.12) как для собственных, так и для несобственных преобразований. Для ассоциированной диаграммы $T'$ соответствующая компонента получается из только что выписанной путем присоединения к первому столбцу ряда

$$m+1, \ldots, \nu, 0, \nu', (\nu-1)', \ldots, (m+1)';$$

она будет веса $\pm\varepsilon_1^{f_1}\ldots\varepsilon_\nu^{f_\nu}$ соответственно тому, возьмем ли мы в (9.4) знак $+$ или $-$. Поэтому (9.10) соответствует подпространству $\mathrm{P}_0(f_1\ldots f_\nu)$, а (9.11) — подпространству $\mathrm{P}_0'(f_1\ldots f_\nu)$. Путем применения леммы Коши в той же форме, что и для симплектической группы, $\chi^+$ и $\chi^-$ приобретут единообразное выражение, и, заменяя символ $l$ на $l+\frac{1}{2}$, мы получим, с нашими старыми условиями (8.7):

$$(9.13) \qquad \chi(f_1\ldots f_\nu) = |p_{l-(\nu-1)} - p_{l-(\nu+1)}, \ldots, p_l - p_{l-2\nu}|$$

для $\mathrm{P}_0(f_1\ldots f_\nu)$ и

$$(9.14) \qquad \chi'(f_1\ldots f_\nu) = |A|\cdot\chi(f_1\ldots f_\nu)$$

для $\mathrm{P}_0'(f_1\ldots f_\nu)$.

Мы достигли теперь пункта, где можем отбросить унитарное ограничение, причем результат будет верен при любом числовом поле (характеристики нуль). Поэтому нет никакой причины не вернуться к основной метрической форме (9.2); тогда нашими рассмотрениями доказано, что алгебраически построенные

$$\langle \mathrm{P}_0(f_1 \ldots f_\nu)\rangle, \qquad \langle \mathrm{P}_0'(f_1 \ldots f_\nu)\rangle$$

образуют полную систему неэквивалентных непрерывных неприводимых представлений вещественной ортогональной группы.

Рассмотрение нечетного случая можно было бы упростить, используя для перехода от собственных к несобственным элементам не (9.3), а $-E$, являющееся в нечетном случае несобственным элементом. Тогда единое выражение (9.13) на собственной и несобственной частях будет совершенно очевидно. Однако мы предпочли изложенный нами способ потому, что он служит моделью для четного случая $n = 2\nu$. Укажем кратко требуемые в этом случае изменения.

Вместо нормальной формы (9.4) элементов группы $UO(n)$ мы получим теперь

$$x_1 \longrightarrow \varepsilon_1 x_1, \ x_1' \longrightarrow \varepsilon_1' x_1', \ \ldots, \ x_\nu \longrightarrow \varepsilon_\nu x_\nu, \ x_\nu' \longrightarrow \varepsilon_\nu' x_\nu'$$

для собственных и

$$x_1 \longrightarrow \varepsilon_1 x_1, \ x_1' \longrightarrow \varepsilon_1' x_1', \ \ldots, \ x_{\nu-1} \longrightarrow \varepsilon_{\nu-1} x_{\nu-1}, \ x_{\nu-1}' \longrightarrow \varepsilon_{\nu-1}' x_{\nu-1}',$$

$$x_\nu \longrightarrow x_\nu', \ x_\nu' \longrightarrow x_\nu$$

— для несобственных элементов. В последнем случае имеем поэтому лишь $\nu - 1$ углов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}$. По поводу определения подстановки $J_n$ см. (9.3). Вместо (9.6) получаем те же соотношения для коэффициентов функций

$$\chi_+(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}, \varphi_\nu = 0) \text{ и } \chi_-(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}).$$

(9.7) следует заменить на

$$(9.15) \quad \begin{cases} \Delta^+ = \prod_{i<k} \{c(\varphi_i) - c(\varphi_k)\} & (i, k = 1, \ldots, \nu), \\ \Delta^- = \prod_i s(\varphi_i) \cdot \prod_{i<k} \{c(\varphi_i) - c(\varphi_k)\} & (i, k = 1, \ldots, \nu - 1). \end{cases}$$

Элементарными суммами $\xi^+(l_1 \ldots l_\nu)$ являются

$$|c(l_1\varphi), \ldots, c(l_\nu\varphi)|$$

для $l_\nu > 0$, *но только половина их*:

$$|c(l_1\varphi), \ldots, c(l_{\nu-1}\varphi), 1$$

для $l_\nu=0$. Это влечет за собой, что

$$\int_0^1\dots\int_0^1 |\xi^+(l_1\dots l_\nu)|^2\, d\varphi_1\dots d\varphi_\nu=\Omega \text{ или } \frac{1}{2}\,\Omega,$$

где $\Omega=2^\nu\nu!$, смотря по тому, будет ли $l_\nu>0$ или $l_\nu=0$; в частности,

$$\int_0^1\dots\int_0^1 \Delta^+\overline{\Delta^+}\,d\varphi_1\dots d\varphi_\nu=\frac{1}{2}\,\Omega$$

для $\Delta^+=\xi^+(\nu-1,\,\dots,\,0)$. Элементарные суммы $\xi^-(l_1\,\dots\,l_{\nu-1})$ — такие же, как для симплектической группы:

$$|s(l_1\varphi),\,\dots,\,s(l_{\nu-1}\varphi)|,$$

и $\Delta^-=\xi^-(\nu-1,\,\dots,\,1)$. Пользуясь обозначениями

$$l_i^0=\nu-i,\qquad f_i=l_i-l_i^0, \tag{9.16}$$

приходим к следующим возможностям:

$$\chi^+=\frac{\xi^+(l_1\dots l_\nu)}{\xi^+(l_1^0\dots l_\nu^0)},\qquad \chi^-=0$$

при $l_\nu>0$;

$$\chi^+=\frac{\xi^+(l_1\dots l_{\nu-1}0)}{\xi^+(l_1^0\dots l_{\nu-1}^0 0)},\qquad \chi^-=\frac{\xi^-(l_1\dots l_{\nu-1})}{\xi^-(l_1^0\dots l_{\nu-1}^0)}$$

и

$$\chi^+=\frac{\xi^+(l_1\dots l_{\nu-1}0)}{\xi^+(l_1^0\dots l_{\nu-1}^0 0)},\qquad \chi^-=-\frac{\xi^-(l_1\dots l_{\nu-1})}{\xi^-(l_1^0\dots l_{\nu-1}^0)}$$

для $l_\nu=0$. Они отвечают, соответственно, тензорным пространствам

$$\begin{aligned} &P_0(f_1\dots f_\nu)=P'_0(f_1\dots f_\nu)\quad (f_\nu>0),\\ &P_0(f_1\dots f_{\nu-1}0),\\ &P'_0(f_1\dots f_{\nu-1}0). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Действительно, в четном случае мы имеем самоассоциированные диаграммы точно с $\nu$ строками, $f_\nu>0$, для которых $P_0$ и $P'_0$ совпадают. Нет ничего удивительного в том, что соответствующий характер равен нулю для несобственных элементов $A$; так как представление эквивалентно ассоциированному с ним, то

$$\chi(A)=-\chi(A) \text{ для } |A|=-1.$$

Наконец, с помощью леммы Коши мы приходим к тому же результату (9.13), (9.14), что и для $n=2\nu+1$, как на собственной, так и на несобственной части, и притом независимо от того, будет ли $f_\nu=0$ или $>0$. Единственное различие состоит в том, что в последнем случае, в согласии с (9.17),

$$\chi(f_1\ldots f_\nu) \text{ совпадает с } \chi'(f_1\ldots f_\nu).$$

И действительно, мы скоро докажем, что определитель (9.13) обращается тогда в нуль для несобственно ортогональных $A$.

Теорема (VII.9.A). *Характеры представлений*

$$\langle \mathrm{P}_0(f_1\ldots f_\nu)\rangle \quad \textit{и} \quad \langle \mathrm{P}_0'(f_1\ldots f_\nu)\rangle$$

*задаются определителями*

$$\chi(f_1\ldots f_\nu)=|p_{l-(\nu-1)}-p_{l-(\nu+1)}\ \ldots,\ p_l-p_{l-2\nu}|, \tag{9.18}$$
$$\chi'(f_1\ldots f_\nu)=|A|\cdot\chi(f_1\ldots f_\nu),$$

*где числа $l$ определяются формулами* (8.7). *Для самоассоциированной диаграммы, $n=2\nu$, $f_\nu>0$, $\chi$ и $\chi'$ совпадают.*

Формулы для степеней можно получить столь же легко, как и в случаях $GL(n)$ и $Sp(n)$.

Теорема (VII.9.B). *Таблица*

$$\langle \mathrm{P}_0(f_1\ldots f_\nu)\rangle,\quad \langle \mathrm{P}_0'(f_1\ldots f_\nu)\rangle$$

(*с той оговоркой, что для самоассоциированной диаграммы, $n=2\nu$, $f_\nu>0$, $\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_0'$ берется только один раз*) *содержит полную систему неэквивалентных непрерывных неприводимых представлений вещественной ортогональной группы.*

Легко проверить, что для любой ортогональной матрицы $A$, $A^*A=E$, характеристический полином

$$\varphi(z)=|E-zA|$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$z^n\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\delta\varphi(z),$$

где $\delta$ есть знак выражения $(-1)^n|A|$. В частности, при $n$ четном, $n=2\nu$, и $A$ несобственном, $|A|=-1$, получаем:

$$z^{2\nu}\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=-\varphi(z),$$

и, следовательно, $\varphi(z)$ имеет вид

$$\varphi(z)=c_0(1-z^{2\nu})+c_1(z-z^{2\nu-1})+\ldots+c_{\nu-1}(z^{\nu-1}-z^{\nu+1}) \qquad (c_0=1),$$

откуда вытекает рекуррентное соотношение

$$c_0(p_l-p_{l-2\nu})+\ldots+c_{\nu-1}(p_{l-\nu+1}-p_{l-\nu-1})=\begin{cases}0 & \text{для } l>0,\\ 1 & \text{для } l=0.\end{cases}$$

Это доказывает, что определитель (9.18) действительно равен нулю, когда $n=2\nu$, $|A|=-1$ и все $l>0$.

Более обще, полином

$$\psi_r(z)=\{1-\delta z^{2r-n}\}\,\varphi(z) \qquad (r>\nu)$$

степени $2r$ удовлетворяет уравнению

$$z^{2r}\psi_r\left(\frac{1}{z}\right)=-\psi_r(z)$$

и потому имеет вид

$$c_0(1-z^{2r})+\ldots+c_{r-1}(z^{r-1}-z^{r+1}) \qquad (c_0=1).$$

Это легко приводит к формулам, аналогичным установленным для симплектической группы [21].

Теорема (VII.9.C). *Для приспособления теорем (VII.8.F) и (VII.8.G) к ортогональной группе следует произвести в них следующие изменения:*

(1) *Положить*

$$L^{\pm}_{f_1\ldots f_\nu}=|z^{f_1+(r-1)},\ldots,z^{f_\nu+(r-\nu)}\,\vdots\,z^{r-\nu-1}\pm \\ \pm z^{r-\nu},\ldots,1\pm z^{2r-n}|$$

*для* $n=2\nu+1$ *и*

$$L^{\pm}_{f_1\ldots f_\nu}=|z^{f_1+(r-1)},\ldots,z^{f_\nu+(r-\nu)}\,\vdots\,z^{r-\nu-1}\mp \\ \mp z^{r-\nu+1},\ldots,1\mp z^{2r-n}|$$

*для* $n=2\nu$. *L-функции для типов* $\mathrm{P}_0(f_1\ldots f_\nu)$ *и* $\mathrm{P}'_0(f_1\ldots f_\nu)$ *задаются формулами*

$$L=\frac{1}{2}(L^{+}+L^{-}), \qquad L'=\frac{1}{2}(L^{+}-L^{-}),$$

*за исключением самоассоциированной диаграммы* ($n=2\nu$, $f_\nu>0$), *где*

$$L(=L')=L^{+},$$

(2) *Заменить знаменатель*

$$\prod_{i<k}(1-z_iz_k) \text{ на } \prod_{i\leqslant k}(1-z_iz_k).$$

Последнее изменение находится в согласии с необходимостью при образовании (симметричной) таблицы скалярных произведений $(x^i x^k)$ заданных векторов $x^1, \ldots, x^n$ охватить и случай $i=k$.

## 10. Разложение и кронекеровское умножение

Проиллюстрируем то, что мы имеем в виду сказать, на симплектической группе, которая не столь уж совсем проста, как $GL(n)$, но и не столь сложна, как $O(n)$. Любое инвариантное подпространство пространства $P_f$ служит полем действия представления $\mathfrak{D}$ группы $Sp(n)$, характер $\chi(\mathfrak{D})$ которого, выраженный через диагональные элементы группы $Sp(n)$:

$$x_\alpha \longrightarrow \varepsilon_\alpha x_\alpha, \qquad x'_\alpha \longrightarrow \varepsilon_\alpha^{-1} x'_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, \nu)$$

есть полином

$$\sum k_{m_1\ldots m_\nu}\, \varepsilon_1^{m_1} \ldots \varepsilon_\nu^{m_\nu} \tag{10.1}$$

с неотрицательными целыми коэффициентами $k_{m_1\ldots m_\nu}$ и целыми, но не обязательно положительными показателями $m_1, \ldots, m_\nu$. Соответствующий вывод для полной линейной группы был явно проведен в § 5 главы IV. Представление $\mathfrak{D}$ разбивается на неприводимые представления типа

$$\langle P(f_1 \ldots f_\nu)\rangle = \mathfrak{d}(f_1 \ldots f_\nu).$$

Мы хотим определить, с какою кратностью каждая из этих неприводимых составляющих входит в $\mathfrak{D}$, в предположении, что нам известны коэффициенты $k_{m_1\ldots m_\nu}$, характеризующие заданное представление $\mathfrak{D}$.

Второй важной задачей является разложение кронекеровского произведения $\mathfrak{d}' \times \mathfrak{d}$ двух неприводимых представлений $\mathfrak{d}'$ и $\mathfrak{d}$ на его неприводимые составляющие $\mathfrak{d}(f_1 \ldots f_\nu)$. Мы решим обе задачи одновременно, дав формулу для кратности, с которой $\mathfrak{d}(f'_1 \ldots f'_\nu)$ входит в произведение

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{d}(f_1 \ldots f_\nu), \tag{10.2}$$

где представление $\mathfrak{D}$ определено коэффициентами $k_{m_1\ldots m_\nu}$ его характера.

Мы предпочтем рассуждать в терминах унитарно ограниченной группы $Sp(n)$. Вместо характера

$$\chi(\mathfrak{D}) = \sum k_{m_1 \ldots m_\nu}\, e(m_1\varphi_1 + \ldots + m_\nu\varphi_\nu) \tag{10.3}$$

мы можем пользоваться и „$\xi$-функцией“ представления $\mathfrak{D}$:

$$\xi(\mathfrak{D}) = \Delta \cdot \chi(\mathfrak{D}),$$

получающейся путем умножения $\chi$ на $\Delta$, (8.3). Относительно октаэдральной группы $Q_\nu$, действующей на углы $\varphi_\nu$, характер $\chi$ симметричен, а функция $\xi$ антисимметрична. $\xi$-функцией представления $\mathfrak{d}(f_1 \ldots f_\nu)$ является

$$\xi(l_1 \ldots l_\nu) = |\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_\nu} - \varepsilon^{-l_\nu}| \tag{10.4}$$

с

$$f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_\nu \geqslant 0, \qquad l_\alpha = f_\alpha + (\nu - \alpha + 1).$$

Определение (10.4) функции $\xi(l_1 \ldots l_\nu)$ мы сохраним и для произвольных целых $l$, независимо от того, удовлетворяют ли они неравенствам

$$l_1 > \ldots > l_\nu > 0$$

или нет.

Кратности $m\begin{pmatrix} f_1 \ldots f_\nu \\ f'_1 \ldots f'_\nu \end{pmatrix}$:

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{d}(f_1 \ldots f_\nu) \sim \sum_{(f')} m\begin{pmatrix} f_1 \ldots f_\nu \\ f'_1 \ldots f'_\nu \end{pmatrix} \mathfrak{d}(f'_1 \ldots f'_\nu)$$

надлежит вывести из характера

$$\chi(\mathfrak{D})\chi(f_1 \ldots f_\nu) = \sum_{(f')} m\chi(f'_1 \ldots f'_\nu)$$

или, по умножении на $\Delta$, — из

$$\chi(\mathfrak{D})\,\xi(l_1 \ldots l_\nu) = \sum m\xi(l'_1 \ldots l'_\nu).$$

Мы намерены показать, что левая часть, т. е. $\xi$-функция представления $\mathfrak{D} \times \mathfrak{d}(f_1 \ldots f_\nu)$, равна [22]

$$\sum k_{m_1 \ldots m_\nu}\, \xi(l_1 + m_1, \ldots, l_\nu + m_\nu), \tag{10.5}$$

т. е., другими словами, что она получается путем подстановки в ряд Фурье (10.3) для $\chi(\mathfrak{D})$

$$\xi(l_1 + m_1, \ldots, l_\nu + m_\nu)$$

вместо каждого члена

$$e(m_1\varphi_1+\ldots+m_\nu\varphi_\nu).$$

Действительно, пусть

$$\pm e(l_1\varphi_1'+\ldots+l_\nu\varphi_\nu') \tag{10.6}$$

— любой из $2^\nu\nu!$ членов, составляющих $\xi(l_1\ldots l_\nu)$; $\varphi_1',\ldots,\varphi_\nu'$ получаются из $\varphi_1,\ldots,\varphi_\nu$ посредством подстановки из октаэдральной группы. Так как выражение (10.3) симметрично относительно этой группы, то мы могли бы написать

$$\chi(\mathfrak{D})=\sum k_{m_1\ldots m_\nu}e(m_1\varphi_1'+\ldots+m_\nu\varphi_\nu'),$$

и потому произведение $\chi(\mathfrak{D})$ на член (10.6) равно

$$\pm\sum_{(m)}k_{m_1\ldots m_\nu}e\left((m_1+l_1)\varphi_1'+\ldots+(m_\nu+l_\nu)\varphi_\nu'\right).$$

Знакопеременное суммирование по $Q_\nu$ приводит к формуле (10.5).

На первый взгляд кажется, что эта формула без всякого труда решает нашу задачу: неприводимая составляющая сигнатуры $(f_1+m_1,\ldots,f_\nu+m_\nu)$ входит с кратностью $k_{m_1\ldots m_\nu}$. Но это уж слишком упростило бы положение дела, поскольку сумма (10.5) содержит много членов, для которых

$$\lambda_1=l_1+m_1,\ \ldots,\ \lambda_\nu=l_\nu+m_\nu$$

не сохраняют убывающего порядка. Правильный вывод, который следует извлечь из (10.5), состоит в следующем: неприводимое представление $\mathfrak{d}(f_1'\ldots f_\nu')$ будет входить в произведение (10.2)

$$\sum\pm k_{\lambda_1-l_1,\ldots,\lambda_\nu-l_\nu}$$

раз, где сумма распространена знакопеременно на все последовательности $(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)$, получающиеся из $(l_1',\ldots,l_\nu')$ посредством операций из группы $Q_\nu$ и где

$$l_1=f_1+\nu,\ \ldots,\ l_\nu=f_\nu+1;\ l_1'=f_1'+\nu,\ \ldots,\ l_\nu'=f_\nu'+1.$$

Более легкое для запоминания выражение мы получим, используя символическое обозначение

$$k_{m_1\ldots m_\nu}\sim k_1^{m_1}\ldots k_\nu^{m_\nu}.$$

Тогда интересующая нас кратность будет задана символическим выражением

$$\left|k^{l_1'}-k^{-l_1'},\ \ldots,\ k^{l_\nu'}-k^{-l_\nu'}\right|\cdot k_1^{-l_1}\ldots k_\nu^{-l_\nu}. \tag{10.7}$$

Эта явная формула включает в качестве частного случая

$$f_1 = \ldots = f_\nu = 0$$

разложение на неприводимые составляющие самого $\mathfrak{D}$.

В удобной форме (10.5) наш результат зависел лишь от того факта, что характер $\chi(\mathfrak{D})$ симметричен относительно группы $Q$, служившей для построения элементарных сумм. Следовательно, он будет верен равным образом и для линейной и ортогональной групп.

Теорема (VII.10.A). *Пусть $\mathfrak{D}$ — любое представление (унитарно ограниченной) группы $Sp(n)$ с характером*

$$\chi(\mathfrak{D}) = \sum k_{m_1\ldots m_\nu} e(m_1\varphi_1 + \ldots + m_\nu\varphi_\nu).$$

*Тогда $\xi$-функцией кронекеровского произведения $\mathfrak{D}$ на неприводимое представление $\mathfrak{d}(f_1\ldots f_\nu)$ служит*

$$\sum_{(m)} k_{m_1\ldots m_\nu}\,\xi(l_1+m_1,\ldots,l_\nu+m_\nu).$$

*То же верно и для линейной и ортогональной групп.*

## 11. Полином Пуанкарэ

Образуем в $n$-мерном векторном пространстве одно-, двух-, трех-, …-мерные элементы, натянутые на 1, 2, 3, … вектора $x, y, z, \ldots$, с компонентами

$$x_i, \quad \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} \quad (i<k), \qquad \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l \\ y_i & y_k & y_l \\ z_i & z_k & z_l \end{vmatrix} \quad (i<k<l), \ldots$$

Линейная подстановка

$$A\colon\ x_i' = \sum_k a_{ik}x_k$$

индуцирует некоторую линейную подстановку в совокупности $p$-мерных элементов. Обозначая ее след через $\psi_p(A)$, имеем соотношение

$$\det(zE + A) = z^n + z^{n-1}\psi_1(A) + \ldots + \psi_n(A).$$

Пусть для конечной группы или компактной группы Ли задано представление $s \longrightarrow A(s)$ с характером $X(s)$. Оно будет разложимо на неприводимые представления согласно формуле (1.1). С помощью соотношений ортогональности находим:

$$m = \mathfrak{M}_s\{X(s)\bar{\chi}(s)\}.$$

В частности, кратностью, с которой в заданное представление входит единичное представление $s \longrightarrow 1$, служит среднее значение

$$\mathfrak{M}_s\{X(s)\};$$

одновременно это есть и число линейно независимых линейных инвариантов в пространстве представления P. Мы хотим определить число $\nu_p$ инвариантов

$$\sum f(i_1 \ldots i_p)\, x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_p}^{(p)}, \tag{11.1}$$

линейно зависящих от произвольного $p$-мерного элемента в P. (Записанные в форме (11.1), коэффициенты $f(i_1 \ldots i_p)$ будут косо-симметричны.) Сделанное выше замечание показывает, что полином $P(z)$ с коэффициентами $\nu_p$:

$$P(z) = z^n + \nu_1 z^{n-1} + \ldots + \nu_n$$

будет равен

$$\mathfrak{M}_s\,|\,zE + A(s)\,|.$$

С любой $r$-параметрической группой Ли ассоциируется присоединенное представление

$$K(s):\ x \longrightarrow sxs^{-1},$$

$r$-мерное векторное пространство которого образуют инфинитезимальные элементы $x$ группы. Полином

$$P(z) = z^r + \nu_1 z^{r-1} + \ldots + \nu_r,$$

коэффициентом $\nu_p$ которого служит размерность линейной совокупности всех инвариантов

$$\sum f(i_1 \ldots i_p)\, \delta x_{i_1}^{(1)} \ldots \delta x_{i_p}^{(p)},$$

линейным и антисимметрическим образом зависящих от $p$ инфинитезимальных элементов нашей группы, Э. Картан назвал „полиномом Пуанкарэ“ этой группы. В случае компактной группы он задается формулой

$$P(z) = \mathfrak{M}_s\,|\,zE + K(s)\,|. \tag{11.2}$$

Мы применим эту формулу, в частности, к нашим группам $GL(n)$, $O(n)$ и $Sp(n)$, предварительно введя в них унитарное ограничение. В следующей главе мы увидим, что коэффициенты $\nu_p$ в то же время имеют для группового многообразия глубокий топологический смысл.

Теорема (VII.11.A). *Полиномом Пуанкарэ группы* $GL(n)$ *является*

$$(1 + z)(1 + z^3)\ldots(1 + z^{2n-1}). \tag{11.3}$$

Диагональному элементу

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$$

унитарной группы соответствует в присоединенном представлении линейное преобразование

$$K\{\varepsilon\}: \quad x'_{ik} = \varepsilon_i x_{ik} \varepsilon_k^{-1}.$$

Поэтому определитель в (11.2) равен

$$\prod_{i,k}\left(z + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}\right) = (1 + z)^n \psi(z) \overline{\psi}(z),$$

где

$$\psi(z) = \prod_{i<k}(\varepsilon_i + z\varepsilon_k).$$

Снова используя разностное произведение

$$\Delta = D(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

и интеграл квадрата его абсолютной величины

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \Delta\overline{\Delta}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = \Omega\ (= n!),$$

находим:

$$P(z) = \frac{(1 + z)^n}{\Omega} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \psi(z) \overline{\psi}(z) \Delta\overline{\Delta}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n. \tag{11.4}$$

Хотя вычисление элементарного интеграла (11.4) вряд ли кто-нибудь счел бы трудным делом, тем не менее, никому до сих пор не удалось выполнить его прямым способом. Р. Брауэр поступил следующим образом [23].

Путем подсчета инвариантов он показал, что $P(z)$ *мажорируется* полиномом (11.3),

$$P_0(z) = z^r + \nu_1^0 z^{r-1} + \ldots + \nu_r^0 \qquad (r = n^2),$$

т. е.

$$\nu_p \leqslant \nu_p^0. \tag{11.5}$$

Использование формулы (11.4) уже для одного значения $z=1$ приводит, как будет ниже показано, к равенству

$$P(1)=2^n. \tag{11.6}$$

Так как это означает, что $P(z)$ и $P_0(z)$ при $z=1$ имеют совпадающие значения:

$$\sum_p \nu_p = \sum_p \overset{0}{\nu}_p,$$

то из (11.5) и следуют требуемые равенства $\nu_p = \overset{0}{\nu}_p$.

При $z=1$ находим в (11.4):

$$\psi(1)\Delta = \prod_{i<k}(\varepsilon_i+\varepsilon_k)(\varepsilon_i-\varepsilon_k) = \prod_{i<k}(\varepsilon_i^2-\varepsilon_k^2) = \Delta_2.$$

Подстановкой $2\varphi_i \longrightarrow \varphi_i$ сразу убеждаемся, что интеграл произведения $\Delta_2\bar{\Delta}_2$ по $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, изменяющимся от 0 до 1, совпадает с таким же интегралом для $\Delta\bar{\Delta}$. Отсюда и следует (11.6).

Вслед за этим мы должны постараться действительно подсчитать инварианты интересующего нас типа. Элемент $A$ группы $GL(n)$ индуцирует в присоединенной группе преобразование

$$X' = AXA^{-1}, \tag{11.7}$$

где $X = \| x_{ik} \|$ обозначает переменную матрицу. Типовой матрицей служит произведение $x\xi$ столбца $x$ на строку $\xi$: $x_{ik}=x_i\xi_k$. Действительно, под влиянием линейного преобразования $x'=Ax$ ковариантного вектора $x$ контравариантный вектор $\xi$ переходит в $\xi A^{-1}$ и потому

$$x'\xi' = A(x\xi)A^{-1}.$$

Поэтому форму

$$\omega = \sum \omega(i_1k_1,\ldots,i_pk_p)\, x^{(1)}_{i_1k_1}\ldots x^{(p)}_{i_pk_p}, \tag{11.8}$$

линейным и антисимметричным образом зависящую от $p$ матриц $X$ и инвариантную относительно подстановок (11.7), можно без опасения заменить инвариантом

$$\sum \omega(i_1k_1,\ldots,i_pk_p)\, x^{(1)}_{i_1}\ldots x^{(p)}_{i_p}\,\xi^{(1)}_{k_1}\ldots\xi^{(p)}_{k_p}, \tag{11.9}$$

линейно зависящим от $p$ ковариантных и $p$ контравариантных векторов

$$x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(p)} \mid \xi^{(1)},\ \ldots,\ \xi^{(p)}. \tag{11.10}$$

Эта формулировка дает возможность ввести в действие основную теорему теории инвариантов: любой такой инвариант выражается через произведения $(\xi x)$ и потому является линейной комбинацией инвариантов

$$(11.11)\qquad (\xi^{(1)}x^{(1')})\,(\xi^{(2)}x^{(2')})\dots(\xi^{(p)}x^{(p')}),$$

соответствующих каждый некоторой подстановке

$$\sigma\colon\ 1\longrightarrow 1',\ 2\longrightarrow 2',\ \dots,\ p\longrightarrow p'$$

$p$ индексов. Если мы, как в § 5 главы V, воспользуемся и для „одночлена“ (11.11) символом $\sigma$, то все наши инварианты примут вид

$$(11.12)\qquad \omega=\sum a(\sigma)\,\sigma.$$

Они должны обладать, кроме того, свойством переходить в $\pm\omega$, когда обе последовательности (11.10) подвергнуты одной и той же подстановке $\rho$, со знаком плюс для четных и минус для нечетных $\rho$. Так как эта операция превращает одночлен $\sigma$ в $\rho\sigma\rho^{-1}$, то получаем:

$$\omega=\pm\sum_{\sigma}a(\sigma)\cdot\rho\sigma\rho^{-1}=\pm\sum_{\sigma}a(\rho^{-1}\sigma\rho)\,\sigma,$$

и, суммируя по всем $\rho$, получаем $\omega$ в виде линейной комбинации инвариантов частного вида

$$(11.13)\qquad \Omega_{\sigma}=\sum_{\rho}\pm\rho\sigma\rho^{-1}$$

или как комбинацию (11.12), где

$$(11.14)\qquad a(\rho^{-1}\sigma\rho)=\delta_{\rho}\cdot a(\sigma).$$

Разложим подстановку $\sigma$ на взаимно простые циклы:

$$\sigma=(12\dots h)\,(1^{*}2^{*}\dots k^{*})\dots$$

Цикл $\rho=(12\dots h)$ перестановочен с $\sigma$. Если $h$ четно, то $\rho$ — нечетная подстановка, и (11.14) дает $a(\sigma)=0$: подстановками, действительно порождающими члены в сумме (11.12), служат лишь подстановки $\sigma$, состоящие из одних циклов нечетных длин $h$, $k$, ... Если $k=h$ $\{\equiv 1 \pmod 2\}$, то нечетная подстановка

$$\rho=(11^{*})\,(22^{*})\dots(hh^{*})$$

перестановочна с $\sigma$, так что и случай $h=k$ исключен. Мы приходим к выводу, что частных инвариантов (11.13) существует столько, сколько разбиений числа $p$:

$$p=h+k+\dots$$

на *неравные* нечетные слагаемые:

$$h < k < \ldots \tag{11.15}$$

Это сразу давало бы неравенство (11.5), *если бы можно было запретить длины* $\geqslant 2n$.

До сих пор мы пользовались лишь *абстрактной схемой* подстановок. Указанное ограничение на длины циклов получится, если мы примем во внимание *представление* подстановки $\sigma$ одночленом (11.11) с векторами $x$ и $\xi$ в *$n$-мерном пространстве.*

Перемножение двух полилинейных форм $\omega$ и $\omega'$ типа (11.8) степеней $p$ и $q$, одна из которых зависит от $p$ матриц $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$, а другая — от $q$ других матриц $X^{(p+1)}, \ldots, X^{(p+q)}$, дает полилинейную форму степени $p+q$. Однако коэффициенты произведения не будут уже, подобно коэффициентам форм $\omega$ и $\omega'$, антисимметричны. Этот недостаток устраняется *альтернированием* по аргументам $X$:

$$\sum \pm \omega(X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_p})\,\omega'(X^{\beta_1}, \ldots, X^{\beta_q}), \tag{11.16}$$

где сумма распространена на все „смеси“

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ \beta_1, \ldots, \beta_q$$

первых $p$ индексов $1, \ldots, p$ со следующими $q$ индексами $p+1, \ldots, p+q$. Форму (11.16) мы будем обозначать через $\omega \cdot \omega'$. Таким путем $\Omega_\sigma$, (11.13), получается как произведение $\Omega_h \cdot \Omega_k \ldots$, где $\Omega_h$ есть альтернированная сумма

$$\sum \pm (\xi^{1'}x^{2'})(\xi^{2'}x^{3'}) \ldots (\xi^{h'}x^{1'}),$$

распространенная на все подстановки $1', \ldots, h'$ индексов $1, \ldots, h$. Следовательно, нам надлежит доказать, что если $p$ нечетно, $p = 2q - 1$ и $q > n$, то $\Omega_p$ выражается в виде комбинации тех $\Omega_\sigma$, которые соответствуют подстановкам $\sigma$ $p$ индексов $1, \ldots, p$, разбивающимся на циклы длин $< p$.

Возьмем тождество

$$\begin{vmatrix} (\xi^{l_1}x^{k_1}) \ldots (\xi^{l_1}x^{k_q}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\xi^{i_q}x^{k_1}) \ldots (\xi^{i_q}x^{k_q}). \end{vmatrix} = 0$$

с

$$\begin{array}{r|l} i_1\ \ i_2\ \ \ldots\ \ i_{q-1}\ \ i_q & k_1\ \ k_2\ \ldots\ k_{q-1}\ \ k_q \\ \hline = 2,\ 4,\ \ldots,\ p-1,\ p & 3,\ 5,\ \ldots,\ p,\ \ 1 \end{array}$$

и умножим его на $(\xi^1 x^2)(\xi^3 x^4)\ldots(\xi^{p-2}x^{p-1})$:

$$\sum_{\tau} \delta_\tau (\xi^1 x^2)(\xi^2 x^{\tau_1})\ldots(\xi^{p-2}x^{p-1})(\xi^{p-1}x^{\tau_{q-1}})(\xi^p x^{\tau_q}) = 0. \tag{11.17}$$

$\tau$ есть подстановка

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & \ldots & p & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \ldots & \tau_{q-1} & \tau_q \end{pmatrix}.$$

Соответствующий член в левой части есть одночлен $\sigma$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & p-2 & p-1 & p \\ 2 & \tau_1 & 4 & \tau_2 & . \; . & p-1 & \tau_{q-1} & \tau_q \end{pmatrix}.$$

Из нашего равенства (11.17):

$$\sum_{\tau} \delta_\tau \sigma = 0$$

заключаем, что

$$\sum_{\tau} \delta_\tau \cdot \Omega_\sigma = 0. \tag{11.18}$$

$\tau^{-1}\sigma =$ циклу $(1\ 2\ 3\ \ldots\ p)$. *Если $\sigma$ — также цикл длины $p$*, то $\sigma$ и $\tau^{-1}\sigma$ четны; поэтому $\tau$ четно, $\delta_\tau = +1$. Предположим, что это событие наступает $N$ раз; оно происходит по крайней мере однажды, а именно, когда $\tau$ есть тождество. Если $\sigma$ есть просто цикл длины $p$, то оно имеет следующий вид:

$$(p,\ 2\varkappa_1 - 1,\ 2\varkappa_1,\ 2\varkappa_2 - 1,\ 2\varkappa_2,\ \ldots,\ 2\varkappa_{q-1} - 1,\ 2\varkappa_{q-1}),$$

и

$$\pi\sigma\pi^{-1} = (12\ldots p),$$

где $\pi$ обозначает подстановку

$$\begin{pmatrix} p & 2\varkappa_1 - 1 & 2\varkappa_1 & 2\varkappa_2 - 1 & 2\varkappa_2 & \ldots \\ p & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{pmatrix}.$$

$\pi$ оставляет $p$ неизменным и *обращает пары* $(2\varkappa - 1,\ 2\varkappa)$. Транспозиция двух пар, как

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

четна. Поэтому подстановка $\pi$ четна, и все $N$ членов $\Omega_\sigma$, соответствующих циклическим $\sigma$, $= \Omega_p$ *с одним и тем же знаком*. Следовательно, (11.18) превращается в равенство

$$N\Omega_p + \ldots = 0,$$

где многоточием обозначены члены $\Omega_\sigma$, соответствующие подстановкам $\sigma$, разбивающимся на циклы длины, меньшей чем $p$.

В соединении с (11.6) это не только доказывает нашу теорему, но в то же время устанавливает и линейную независимость базисных инвариантов, к которым приводит наше построение:

Теорема (VII.11.B). *Инварианты*

$$\Omega_{h_1} \cdot \Omega_{h_2} \ldots,$$

*соответствующие всем разбиениям* $p = h_1 + h_2 + \ldots$ *числа* $p$ *на нечетные неравные слагаемые* $h_1$, $h_2$, $\ldots$, *меньшие* $2n$:

$$h_1 < h_2 < \ldots; \quad h_\alpha \equiv 1 \pmod 2, \quad 0 < h_\alpha < 2n,$$

*линейно независимы и образуют базис для линейных инвариантов p-той степени присоединенной группы.*

Интеграл (11.4) теперь вычислен и, действительно, оказался равен полиному (11.3).

Аналогичные результаты могут быть получены аналогичным путем и для ортогональной и симплектической групп. Мы удовольствуемся формулировкой окончательного результата [23]:

Теорема (VII.11.C). *Полиномами Пуанкарэ групп* $Sp(2\nu)$, $O(2\nu+1)$, *с одной стороны, и группы* $O(2\nu)$ — *с другой, служат, соответственно,*

$$(1+z^3)(1+z^7)\ldots(1+z^{4\nu-1})$$

*и*

$$(1+z^3)(1+z^7)\ldots(1+z^{4\nu-5})(1+z^{2\nu-1}).$$

# ГЛАВА VIII

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

## А. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 1. Классические инварианты и инварианты обобщенных величин. Теорема Грама

Классическая теория инвариантов[1] имеет дело с группой $GL(n)$ и рассматривает произвольную (ковариантную) форму $u$ заданной степени $r$, зависящую от контравариантного вектора $\xi$; мы будем записывать такую форму в виде

$$(1.1) \qquad u = \sum \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} u_{r_1 \dots r_n} \xi_1^{r_1} \dots \xi_n^{r_n} \qquad (r_1 + \dots + r_n = r).$$

Однородный полином $J(u)$ степени $\mu$ от коэффициентов формы $u$ есть инвариант веса $g$, если

$$J(u') = \Delta^g \cdot J(u),$$

где $u'_{r_1 \dots r_n}$ суть коэффициенты формы, в которую переходит $u$ при произвольной подстановке

$$(1.2) \qquad \left(x'_i = \sum_k a_{ik} x_k\right) \qquad \xi_i = \sum_k a_{ki} \xi'_k,$$

а $\Delta$ обозначает $\det(a_{ik})$. Вместо одной формы $u$, $J$ может иметь в качестве аргументов и несколько произвольных основных форм $u$, $v$, ... заданных степеней $r$, $r'$, ... Если $\mu$, $\mu'$, ... — степени $J(u, v, \dots)$ относительно $u$, $v$, ..., то необходимо

$$(1.3) \qquad ng = r\mu + r'\mu' + \dots,$$

как показывает сравнение степеней обеих частей равенства

$$J(u', v', \dots) = \Delta^g J(u, v, \dots)$$

относительно коэффициентов преобразования $a_{ik}$. Для простоты мы будем большей частью говорить об одной или двух основных формах, имея, однако, в виду произвольное их число.

Если $J$ зависит, кроме $u$ и $v$, еще от контравариантного вектора $\xi$, и снова

$$J(u', v'; \xi') = \Delta^g J(u, v; \xi),$$

то $J$ называется *ковариантом*. При этом предполагается, что $J$ есть однородная форма некоторой степени $m$ относительно $\xi$; тогда

$$ng + m = r\mu + r'\mu'.$$

Теперь для $g$ допускаются и отрицательные значения. Сами основные формы $u$, $v$ являются абсолютными ковариантами, или ковариантами веса нуль.

Примеры. (1) Функциональный определитель или *якобиан*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

$n$ форм $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ есть ковариант веса 1. Действительно,

$$du^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \ldots + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi_n} d\xi_n,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$du^{(n)} = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \ldots + \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi_n} d\xi_n$$

есть система инвариантных линейных форм от дифференциалов $d\xi_1, \ldots, d\xi_n$. Под влиянием подстановки

$$d\xi_i = \sum_k a_{ki} d\xi'_k$$

определитель $n$ таких форм умножается на определитель преобразования $\Delta$.

(2) Для отдельной формы $u$ „гессиан“

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \right|$$

есть ковариант веса 2, так как

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_k} d\xi_i d\xi_k$$

есть инвариантная квадратичная форма от дифференциалов $d\xi_i$.

Классическое понятие коварианта непосредственно обобщается на случай, когда в качестве аргументов допускается несколько контравариантных векторов $\xi$, $\eta$, ...; тогда мы говорим о кратном ковarианте. Система уравнений

$$(1.4) \qquad K_1(u, v) = 0, \ \ldots, \ K_p(u, v) = 0,$$

где в левых частях стоят полиномы, однородные как относительно коэффициентов $u_{r_1 \ldots r_n}$ формы $u$, так и относительно коэффициентов $v_{r'_1 \ldots r'_n}$ формы $v$, имеет *инвариантный смысл*, если каждая система значений

$$u_{r_1 \ldots r_n}, \qquad v_{r'_1 \ldots r'_n},$$

удовлетворяющая уравнениям (1.4), удовлетворяет также уравнениям

$$K_1(u', v') = 0, \ \ldots, \ K_p(u', v') = 0,$$

каким бы преобразованием (1.2) ни получались $u'$, $v'$ из $u$, $v$.

Теорема (VIII.1.A). (Теорема Грама.) *Система соотношений (1.4), имеющих инвариантный смысл, всегда может быть выражена посредством обращения в нуль некоторого числа кратных абсолютных ковариантов.*

Доказательство основывается на простом формальном приеме, который мы опишем следующим образом. Пусть $\eta^1, \ldots, \eta^n$ — любые $n$ контравариантных векторов. Заменим аргумент $\xi$ в форме $u = u(\xi)$ на

$$t_1\eta^1 + \ldots + t_n\eta^n$$

с неопределенными $t$:

$$(1.5) \quad u(t_1\eta^1 + \ldots + t_n\eta^n) = \\ = \sum \frac{r!}{r_1! \ldots r_n!} t_1^{r_1} \ldots t_n^{r_n} u^*_{r_1 \ldots r_n}(\eta^1, \ldots, \eta^n).$$

Все это выражение есть абсолютный ковариант, и этим же свойством обладает каждый коэффициент

$$(1.6) \qquad u^*_{r_1 \ldots r_n}(\eta^1, \ \ldots, \ \eta^n).$$

То же верно и для любого однородного полинома от этих коэффициентов. Если в качестве $\eta^1, \ldots, \eta^n$ взять единичные векторы

$$e^1 = (1, 0, \ \ldots, \ 0), \ \ldots, \ e^n = (0, 0, \ldots, 1),$$

то $u^*_{r_1 \ldots r_n}$ обратятся снова в заданные коэффициенты $u_{r_1 \ldots r_n}$.

Если $\eta^1, \ldots, \eta^n$ линейно независимы, то равенство

$$\xi = t_1\eta^1 + \ldots + t_n\eta^n \tag{1.7}$$

можно рассматривать как линейное преобразование, вводящее вместо компонент $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вектора $\xi$ новые координаты $t_1, \ldots, t_n$.

Следовательно, предположение об инвариантности смысла системы (1.4) позволяет вывести из нее систему

$$K_1(u^*, v^*) = 0, \quad \ldots, \quad K_p(u^*, v^*) = 0, \tag{1.8}$$

которая, обратно, снова сводится к (1.4) при специализации

$$\eta^1 = e^1, \ \ldots, \ \eta^n = e^n.$$

Система (1.8) имеет нужный нам вид

$$C_1(u, v; \eta^1, \ldots, \eta^n) = 0, \ \ldots, \ C_p(u, v; \eta^1, \ldots, \eta^n) = 0. \tag{1.9}$$

От абсолютных ковариантов $C_\alpha$ требуется обращение в нуль при заданных значениях $u$, $v$ тождественно относительно аргументов $\eta^1, \ldots, \eta^n$.

Вполне может случиться, что тождество

$$C_1(u, v; \eta^1, \ldots, \eta^n) = 0$$

поглотит не только первое из уравнений (1.4), но и некоторые другие. Тогда можно будет соответственно уменьшить и число тождеств (1.9).

Наши кратные коварианты $C_\alpha$ зависят от $n$ векторов $\eta^i$. Однако это никоим образом не является неожиданной особенностью нашей теоремы. Действительно, даже если бы $C_\alpha$ содержали любое число векторных аргументов $\eta$, это число можно было бы с помощью общего тождества Капелли свести к $n$. Применением специального тождества Капелли это число можно снизить даже до $n-1$, предполагая, что допускаются лишь коварианты веса $\geqslant 0$.

Произвольная форма, зависящая от двух контравариантных векторов $\xi$ и $\eta$ в заданных степенях $r$, $r'$, является не примитивной величиной, а кронекеровским произведением примитивных величин сигнатур

$$(r, 0, \ldots, 0) \quad \text{и} \quad (r', 0, \ldots, 0).$$

Ее следовало бы заменить набором независимых примитивных величин, на которые ее можно расщепить. По этой причине мы отвергаем понятие кратных ковариантов, как не отвечающее существу дела. Резонно разбить каждое из наших уравнений (1.9) соответственно различным диаграммам симметрии. Раз уже усвоив критическое отношение к классическим концепциям, мы приходим к выводу, что в качестве аргументов в наших инвариантах нужно допускать *обобщенные величины* любой сигнатуры $(f_1, \ldots, f_n)$, не ограничиваясь лишь основными формами [2]. И при рассмотрении ковариантов следует понимать этот термин в широком смысле, введенном в § 5 главы I, как означающий обобщенную величину $J$, зависящую от некоторого числа переменных обобщенных величин $u$, $v$, ... предписанных сигнатур

$$(r_1, \ldots, r_n), \quad (r'_1, \ldots, r'_n), \ldots$$

Этой схемой, кроме ковариантных форм, охватываются также контравариантные основные формы и даже смешанные „конкомитанты" (зависящие от нескольких контравариантных и нескольких ковариантных векторов). В предположении, что $J(u, v, \ldots)$ имеет относительно своих аргументов $u$, $v$, ... соответственно степени $\mu$, $\mu'$, ..., имеем между степенями

$$f = f_1 + \cdot \ \cdot + f_n; \quad r = r_1 + \ldots + r_n, \quad r' = r'_1 + \ldots + r'_n, \ldots$$

обобщенных величин $J$; $u$, $v$, ... соотношение

$$f = r\mu + r'\mu' + \ldots, \tag{1.10}$$

являющееся обобщением соотношения (1.3); это легко следует из того факта, что при подстановке

$$x'_i = ax_i$$

компоненты обобщенной величины степени $f$ умножаются на $a^f$. Если для некоторого аргумента $u$ сигнатура $(r_1, \ldots, r_n)$ содержит отрицательное $r_n$, то представление, по которому преобразуются компоненты величины $u$, можно заменить представлением сигнатуры $(r_1 + e, \ldots, r_n + e)$, где $e$ выбрано так, чтобы $r_n + e \geqslant 0$. Действительно, это будет иметь своим следствием лишь то, что сигнатура $(f_1, \ldots, f_n)$ зависимой величины $J$ заменится на $(f_1 + \mu e, \ldots, f_n + \mu e)$. Поэтому можно без сколько-нибудь существенного ограничения общности считать, что $r_n \geqslant 0$, т. е. что $u$ пробегает совокупность всех тензоров ранга $r$ с симметрией $T(r_1 \ldots r_n)$.

Теорема (VIII.1.B). (Обобщенная теорема Грама.) *Система соотношений*

$$K_1(u, v, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad K_p(u, v, \ldots) = 0$$

*между обобщенными величинами* $u, v, \ldots$ *предписанных сигнатур* $(r_1, \ldots, r_n), \ldots$, *имеющая инвариантный смысл, эквивалентна системе, утверждающей обращение в нуль некоторого числа ковариантов, т. е. обобщенных величин, зависящих от* $u, v, \ldots$

Доказательство. Мы можем считать, что $r_n \geqslant 0$, т. е. что $u$ пробегает совокупность всех тензоров $F(i_1 \ldots i_r)$ заданного ранга $r$ с заданной симметрией $T = T(r_1 \ldots r_n)$. Подставляем в инвариантную форму

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots} F(i_1 i_2 \ldots) \xi_{i_1} \xi'_{i_2} \ldots \tag{1.11}$$

вместо контравариантных векторов $\xi, \xi', \ldots$ линейные комбинации $n$ таких векторов $\eta^1, \ldots, \eta^n$:

$$\begin{aligned} \xi &= t_1 \eta^1 + \ldots + t_n \eta^n, \\ \xi' &= t'_1 \eta^1 + \ldots + t'_n \eta^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Тогда (1.11) превращается в полилинейную форму от систем переменных $(t_1, \ldots, t_n)$, $(t'_1, \ldots, t'_n), \ldots$:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots} F^*(i_1 i_2 \ldots; \eta^1 \ldots \eta^n) \, t_{i_1} t'_{i_2} \ldots$$

Коэффициенты

$$F^*(i_1 i_2 \ldots; \eta^1 \ldots \eta^n)$$

являются абсолютно инвариантными функциями от $n$ контравариантных аргументов $\eta^1, \ldots, \eta^n$. Начиная отсюда доказательство протекает, как раньше.

## 2. Символический метод

Символический метод лучше всего иллюстрируется классическим примером инварианта $J(u)$ степени $\mu$, зависящего от произвольной ковариантной формы $u$ степени $r$. Путем специализации $u$ в качестве $r$-й степени линейной формы:

$$u_\xi^r = (u_1 \xi_1 + \ldots + u_n \xi_n)^r, \qquad u_{r_1 \ldots r_n} = u_1^{r_1} \ldots u_n^{r_n}, \tag{2.1}$$

$J(u)$ превращается в инвариант $j(u)$, зависящий от ковариантного вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$. В этой примитивной форме наш метод, имеющий своей целью замену инвариантов форм векторными инвариантами, не приносит большой пользы, поскольку

$J(u)$ слабо отличим от его символического представителя $j(u)$. Однако этот недостаток устраняется путем предварительной полной поляризации инварианта $J(u)$. (Поляризация, примененная к аргументам $u$, называется процессом Аронгольда.) Поляризованная форма $J(u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)})$ линейно зависит от $\mu$ произвольных форм $u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)}$ степени $r$; кроме того, она симметрична относительно $\mu$ ее аргументов и при отождествлении

$$u^{(1)} = \ldots = u^{(\mu)} = u$$

обращается снова в $J(u)$. При подстановке вместо $u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)}$ $r$-х степеней $\mu$ линейных форм, инвариант форм $J(u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)})$ превращается в инвариант $j(u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)})$, зависящий от $\mu$ ковариантных векторов $u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)}$; при этом $j$ имеет степень $r$ по каждому из своих аргументов. $j$ называется *символическим выражением* для $J$ с ковариантными векторами $u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)}$, как $\mu$ *эквивалентными символами*, подставленными вместо одной и той же формы $u$. Чтобы получить обратно $J(u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)})$ из $j(u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)})$, замечаем, что линейная форма от коэффициентов $u_{r_1 \ldots r_n}$ формы $u$:

$$\sum \gamma_{r_1 \ldots r_n} u_{r_1 \ldots r_n} \qquad (\gamma_{r_1 \ldots r_n} \text{ —константы})$$

однозначно определяется ее значением при специальном выборе $u$, (2.1), а именно, формой

$$\sum \gamma_{r_1 \ldots r_n} u_1^{r_1} \ldots u_n^{r_n}.$$

Если временно обозначить векторные аргументы в $j$ через $u, v, \ldots$, а не $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$:

$$j(u, v, \ldots) = \sum \lambda(r_1 \ldots r_n; s_1 \ldots s_n; \ldots) u_1^{r_1} \ldots u_n^{r_n} v_1^{s_1} \ldots v_n^{s_n} \ldots$$
$$(r_1 + \ldots + r_n = s_1 + \ldots + s_n = \ldots = r),$$

то $J(u)$ будет получаться из $j(u, v, \ldots)$,

$$j(u, v, \ldots) \longrightarrow J(u),$$

следующим образом:

$$J(u) = \sum \lambda(r_1 \ldots r_n;\ s_1 \ldots s_n;\ \ldots) u_{r_1 \ldots r_n} u_{s_1 \ldots s_n} \ldots$$

Этот процесс действителен даже, если $j(u, v, \ldots)$ не симметрична относительно $\mu$ ее эквивалентных векторных аргументов $u, v \ldots$. Имеем

$$j(v, u, \ldots) \longrightarrow J(u)$$

для любой перестановки $v, u, \ldots$ символов $u, v, \ldots$

Из первой основной теоремы мы знаем, как обстоит дело с векторными инвариантами: все они выражаются через компонентные определители $[uv\ldots]$. Таким образом, символический метод дает правило для вычисления всех инвариантов $J(u)$ заданной степени $\mu$, настолько явный и финитный, насколько этого вообще можно требовать: образуем все возможные произведения компонентных определителей $\mu$ векторов $u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)}$, имеющие по каждому из этих векторов степень $r$, и выполняем переход $j \longrightarrow J$ к несимволической форме. Каждый инвариант степени $\mu$ является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами от так полученных $J$. Сколь ни велико это достижение, следует, однако, указать, что изложенный метод далеко еще не сводит построения конечного целого рационального базиса для инвариантов форм к построению такого же базиса для векторных инвариантов. Действительно, число символических векторных аргументов $u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)}$, которые нам пришлось ввести, зависит от степени инварианта $J(u)$, и, желая учесть инварианты $J$ всех возможных степеней, мы должны иметь в нашем распоряжении неограниченный запас таких символов.

Обобщение на инварианты $J(u, v, \ldots)$, зависящие от нескольких форм $u, v, \ldots$, непосредственно напрашивается. В случае ковариантa $J(u, v; \xi)$ символическое выражение

$$j(u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)};\ v^{(1)}, \ldots, v^{(\mu')};\ \xi)$$

будет помимо символических ковариантных векторов

$$u^{(1)}, \ldots, u^{(\mu)};\ v^{(1)}, \ldots, v^{(\mu')}$$

зависеть еще от контравариантного вектора $\xi$, и потому будет выражаться через латинские компонентные определители и произведения типа $(\xi u) = u_\xi;\ v_\xi;\ \ldots$

Примеры. (а) Дискриминант

$$D = u_{11}u_{22} - u_{12}^2 \tag{2.2}$$

бинарной квадратичной формы

$$u_{11}\xi_1^2 + 2u_{12}\xi_1\xi_2 + u_{22}\xi_2^2. \tag{2.3}$$

Поляризация превращает $2D$ в

$$u_{11}v_{22} + u_{22}v_{11} - 2u_{12}v_{12},$$

что при специализации дает

$$u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1u_2v_1v_2 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

Следовательно, символическим выражением для $D$ служит

$$\frac{1}{2}[uv]^2.$$

(b) Якобиан трех тернарных форм, которые мы записываем символически в виде

$$u_\xi^r, \quad v_\xi^{r'}, \quad w_\xi^{r''},$$

как легко видеть, равен

$$rr'r''u_\xi^{r-1}v_\xi^{r'-1}w_\xi^{r''-1}[uvw].$$

Никакой поляризации не требуется, так как якобиан линеен относительно коэффициентов рассматриваемых форм.

(c) Гессиан тернарной формы

$$f = u_\xi^r \,(= v_\xi^r = w_\xi^r),$$

как легко видеть, имеет символическим выражением

$$\frac{1}{6}r^3(r-1)^3(u_\xi v_\xi w_\xi)^{r-2}[uvw]^2.$$

Для обеспечения естественной общности мы теперь снова допустим в качестве аргументов $u, v, \ldots$ наших инвариантов переменные обобщенные величины предписанных сигнатур $(r_1, \ldots, r_n)$, $(r'_1, \ldots, r'_n), \ldots$ Как нам следует приспособить символический метод к этому общему случаю? Мы раньше видели, что предположение $r_n \geqslant 0$ не налагает никакого серьезного ограничения. $u$ пробегает тогда совокупность всех тензоров $F(i_1 \ldots i_r)$ ранга $r = r_1 + \ldots + r_n$ и симметрии $T(r_1 \ldots r_n)$. Пусть $e$ — производящий идемпотент этого класса симметрии, численное кратное симметризатора Юнга $c$. Мы заменяем тензор $F$ на $eF$, так что $F$ пробегает теперь *все* тензоры ранга $r$:

$$J^*(F, \ldots) = J(eF, \ldots).$$

Так как $eF = F$ для тензоров $F$ из $\mathrm{P}(r_1 \ldots r_n)$, то нам таким образом удалось построить инвариант $J^*(F, \ldots)$, определенный для *произвольных* тензоров $F, \ldots$, совпадающий с заданным $J(F, \ldots)$ в области

$$F \in \mathrm{P}(r_1 \ldots r_n), \ldots,$$

в которой $J$ был определен. Устранив тем самым какое бы то ни было ограничение симметрией, применим процесс Аронгольда к $J^*$ и затем специализируем $F$ как произведение $r$ переменных ковариантных векторов $u, v, \ldots, w$:

$$F(i_1 i_2 \ldots i_r) = u_{i_1} v_{i_2} \ldots w_{i_r}.$$

Исходный инвариант $J$ воспроизводится по полученному так векторному инварианту $j$ простым способом.

При переходе от инвариантов к изучению ковариантных обобщенных величин $Q(u, v, \ldots)$ естественно принять, что в сигнатуре $(f_1, \ldots, f_n)$ величины $Q$ заданы лишь разности $f_i - f_k$; они характеризуют поведение $Q$ при *унимодулярных* преобразованиях $A$. Но $Q$ преобразуется с точностью до множителя $\Delta^e$ $(e = f_n)$, как тензер $Q(i_1 \ldots i_f)$ с симметрией

$$T(f_1 - e, \ldots, f_n - e) \qquad \{f = \sum f_i - ne\},$$

и

$$\sum Q(i_1 \ldots i_f) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_f}$$

есть тогда инвариант веса $e$, зависящий от контравариантных векторов $\xi, \ldots, \zeta$; в своей зависимости от $u, v, \ldots$ он легко поддается символической трактовке.

## 3. Бинарная квадратичная форма

Теорема (VIII.3.А). *Каждый инвариант бинарной квадратичной формы выражается через ее дискриминант, а каждый ковариант (простой или кратный) — через дискриминант, саму (поляризованную) форму и компонентные определители.*

Мы берем этот простой случай в качестве иллюстрации того, как, вопреки нашим критическим замечаниям, можно иногда использовать символический метод, в комбинации с рассуждениями другого типа, для фактического определения целого рационального базиса.

Символическое выражение инварианта $J(u)$ степени $\mu$ для квадратичной формы (2.3) будет инвариантом $j(a, b, c, \ldots)$, зависящим от $\mu$ эквивалентных символических бинарных векторов $a, b, c, \ldots$ и имеющим по каждому из них степень 2. $j$ выражается через компонентные определители типа

$$[ab] = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Произведение таких определителей, в которое каждый аргумент входит точно дважды, разбивается на некоторое число замкнутых цепей вида

$$[ab][bc][cd] \ldots [ha] \longrightarrow K, \tag{3.1}$$

где $a, b, c, d, \ldots, h$ различны. Если цепь имеет нечетную длину, то, обращая порядок следования аргументов в каждом звене, получаем:

$$[ah] \ldots [cb][ba] \longrightarrow -K.$$

Так как правая часть отличается от (3.1) лишь нумерацией эквивалентных символов, то в этом случае для истинного инварианта $K$, символически выраженного посредством (3.1), получаем;

$$K = -K, \text{ откуда } K = 0.$$

Пусть теперь цепь имеет четную длину, равную $2l$. Случай наименьшей длины 2 разрешается соотношением

$$[ab][ba] = -[ab]^2 \longrightarrow -2D \quad (D \text{ — дискриминант}).$$

В случаях бо́льших длин используем тождество

$$[ab][cd] + [ca][bd] + [bc][ad] = 0. \tag{3.2}$$

Подставляя в (3.1) вместо произведения $[ab][cd]$ выражение

$$-[ca][bd] - [bc][ad],$$

получаем:

$$K = K_l = -[ca][bd][bc][de] \ldots - [bc]^2[ad][de] \ldots =$$
$$= -[ac][cb][bd][de] \ldots - [bc]^2[ad][de] \ldots$$

или, переходя к несимволическим объектам:

$$K_l = -K_l - 2DK_{l-1} \quad \text{или} \quad K_l = -DK_{l-1}.$$

Таким образом, индукцией по $l$ находим:

$$K = 0 \quad \text{или} \quad 2(-D)^l,$$

соответственно нечетности или четности длины цепи. Этим и разрешается вопрос об инвариантах.

Обращаясь к ковариантам, заменяем контравариантный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, согласно (IV.5.1), ковариантным вектором

$$\xi^{\cdot} = (\xi_2, -\xi_1),$$

тем самым превращая сигнатуру из $(0, -1)$ в $(1, 0)$. Наряду с замкнутыми цепями мы встретимся теперь с цепями, соединяющими два греческих символа латинскими звеньями:

$$[\xi^{\cdot} a][ab] \ldots [gh][h\eta^{\cdot}].$$

Кратчайшей такой цепью, если не считать самого компонентного определителя $[\xi'\eta'][=[\eta\xi]$, является

$$-[\xi'a][a\eta'] = a_\xi \cdot a_\eta,$$

а это есть симметричная билинейная форма, соответствующая заданной квадратичной. Более длинные цепи, коль скоро они не равны нулю, получаются из этой умножением на степени дискриминанта. Метод доказательства — тот же, что и выше.

Символический метод и его применения получили столь широкое распространение в ходячих учебниках по теории инвариантов, что мы ограничимся одним этим примером.

## 4. Иррациональные методы

Символический метод на самом деле отнюдь не является единственным путем, на котором можно успешно достичь определения конечного целого рационального базиса для инвариантов в простых конкретных случаях. Иногда неожиданно быстро приводит к результату применение надлежащих иррациональных методов. В качестве примера докажем следующее предложение:

Теорема (VIII.4.A). *Каждый инвариант квадратичной формы от $n$ переменных*

$$\sum g_{ik}\xi_i\xi_k \quad (g_{ki} = g_{ik}) \tag{4.1}$$

*выражается через дискриминант*

$$D = \det(g_{ik}).$$

Пусть $c$ — значение заданного инварианта $J$ для единичной формы

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2. \tag{4.2}$$

Если $J$ — инвариант веса $h$, то для формы (4.1), получающейся из (4.2) линейной подстановкой

$$\xi_i \rightarrow \sum a_{ki}\xi_k$$

с определителем $\Delta = \det(a_{ik})$, $J$ будет равен

$$c \cdot \Delta^h.$$

Так как

$$D = \Delta^2,$$

то получаем:

$$J^2(g) = c^2 \cdot D^h. \tag{4.3}$$

Пусть теперь $g_{ik}=g_{ki}$ — произвольно заданные значения с ненулевым определителем $D$. *После надлежащих квадратичных расширений основного поля* форма с этими коэффициентами может быть преобразована в единичную форму. Поэтому (4.3) выполняется для любых таких значений $g_{ik}$ и, следовательно, является тождеством. Принимая во внимание, что $D$ есть *неприводимый* полином от $\frac{1}{2}n(n+1)$ переменных $g_{ik}$, заключаем из (4.3), что $J(g)$ сам должен быть степенью $D$ с постоянным множителем, т. е. что $h$ четно и

$$J(g)=c\cdot D^{\frac{h}{2}}.$$

Для доказательства неприводимости симметричного определителя

$$D_n=\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

делаем индуктивное предположение, что $D_{n-1}$ неприводим. $D_n$ есть линейная функция переменной $g_{nn}$:

$$D_n=D_{n-1}g_{nn}+D_n(g_{nn}=0).$$

Если бы $D_n$ распадался на два множителя, то один из них был бы степени 1 относительно $g_{nn}$, а другой — степени 0:

$$D_n=(Bg_{nn}+B')C$$

($B$, $B'$, $C$ не зависят от $g_{nn}$), т. е.

$$D_{n-1}=BC,\quad D_n(g_{nn}=0)=B'C.$$

Так как $D_{n-1}$ неприводим, то либо $B$, либо $C$ должно быть постоянной, не зависящей ни от каких $g_{ik}$. Поскольку второй случай не дает действительного разложения определителя $D_n$, мы можем принять, что $B=1$, откуда

$$D_n(g_{nn}=0)=B'D_{n-1}. \tag{4.4}$$

Но простой пример

$$\|g_{ik}\|=E_{n-2}\dot{+}\begin{Vmatrix} a & b \\ b & 0 \end{Vmatrix}$$

с

$$D_n(g_{nn}=0)=-b^2,\quad D_{n-1}=a$$

показывает, что $D_n(g_{nn}=0)$ не делится на $D_{n-1}$, в противоречие с (4.4).

К бинарной кубичной форме

$$f = u_0\xi_1^3 + u_1\xi_1^2\xi_2 + u_2\xi_1\xi_2^2 + u_3\xi_2^3$$

легко применить аналогичный „иррациональный“ способ. Положив $u_0 = 1$ и $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, решаем кубичное уравнение

$$\xi^3 + u_1\xi^2 + u_2\xi + u_3 = (\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3).$$

Тем самым инвариант $J$ становится симметрическим полиномом от корней $a_1$, $a_2$, $a_3$. Из того факта, что единственным проективно инвариантным соотношением между тремя точками $a_1$, $a_2$, $a_3$ на прямой является совпадение, легко заключаем, что рассматриваемый инвариант должен быть степенью дискриминанта

$$D = 27(a_1 - a_2)^2(a_2 - a_3)^2(a_3 - a_1)^2$$

с постоянным множителем. Единственным проективным инвариантом, зависящим от четырех точек $\xi$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ прямой, является двойное их отношение

$$\frac{(\xi - a_1)(a_3 - a_2)}{(\xi - a_2)(a_3 - a_1)} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \eta,$$

которое, однако, при перестановках трех корней $a_1$, $a_2$, $a_3$ принимает 6 значений

$$\eta, \quad \frac{1}{\eta}, \quad 1 - \eta, \quad \frac{1}{1-\eta}, \quad \frac{\eta}{\eta - 1}, \quad \frac{\eta - 1}{\eta}.$$

Это без особого труда приводит к полному списку ковариантов. Кроме самой формы $f$, получаем еще две другие формы, одной из которых, как легко проверить, является гессиан $-4H$ формы $f$, а другой — якобиан $t$ форм $f$ и $H$. Четверка ковариантов $D$, $f$, $H$, $t$ связана одним соотношением

$$4H^3 = t^2 + Df^2$$

(сизигия). В руководствах по теории инвариантов эти результаты выводятся с помощью символического метода [3].

## 5. Дополнительные замечания

Прежде чем погрузиться в глубокие воды, скользнем по поверхности парой замечаний относительно общих инвариантов. Возьмем ситуацию, описанную в § 5 главы I: даны группа $\gamma$ и некоторое число переменных величин $x$, $y$, ..., типы которых определены (неприводимыми) представлениями группы $\gamma$, и исследуются *относительные инварианты* $J$ от таких аргументов. Как полином от компонент величин $x, y, \ldots, J(x, y, \ldots)$ может быть приводимым; мы разлагаем его на простые множители:

$$J = c\cdot J_1^{e_1} \ldots J_h^{e_h}.$$

Возникает вопрос, будут ли простые полиномы $J_1, \ldots, J_h$ относительными инвариантами. При некоторых ограничениях на природу группы $\gamma$ это оказывается верным:

Теорема (VIII.5.A). *В предположении, что группа $\gamma$ не имеет никакой подгруппы конечного индекса (за исключением самой себя), каждый простой множитель относительного инварианта является относительным инвариантом.*

Преобразования

$$x \longrightarrow x', \quad y \longrightarrow y', \ldots,$$

индуцированные групповым элементом $s$, приводят к равенству

$$J(x', y', \ldots) = \lambda\cdot J(x, y, \ldots)$$

с мультипликатором $\lambda = \lambda(s)$, или

$$J_1^{e_1}(x', y', \ldots)\, J_2^{e_2}(x', y', \ldots) \ldots = \lambda\cdot J_1^{e_1}(x, y, \ldots)\, J_2^{e_2}(x, y, \ldots) \ldots$$

Следовательно, $J_1' = J_1(x', y', \ldots)$ должно быть произведением каких-то простых множителей, стоящих в правой части, и то же верно для $J_2', \ldots$ В каждом случае число множителей (которое, самое меньшее, равно единице) должно быть точно равно единице, так как иначе произведение в левой части состояло бы более чем из $e_1 + e_2 + \ldots$ простых множителей. Следовательно, мы будем иметь равенства вида

$$J_i' = \lambda_i\cdot J_{\alpha_i},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ — некоторая перестановка индексов $1, \ldots, h$. Те элементы $s$, для которых эта перестановка есть тождество, очевидно, образуют в $\gamma$ подгруппу индекса $\leqslant h!$.

Для полной линейной группы и классического случая инвариантов форм $J(u, v, \ldots)$ удобнее рассматривать преобразованный $J(u', v', \ldots)$ как полином от $u, v, \ldots$ *и от коэффициентов преобразования* $a_{ik}$. Мультипликатор $\lambda(A)$ равен $\Delta^g$. Оперируя в только что описанной области, мы придем к равенству вида

$$J_1(u', v', \ldots) = \Delta^{g_1}\cdot J_\alpha(u, v, \ldots).$$

Специализация $a_{ik}=\delta_{ik}$ сразу покажет тогда, что $\alpha=1$. Здесь нам не пришлось вникать в строение рассматриваемой группы:

Теорема (VIII. 5. B). *В случае полной линейной группы каждый простой множитель инварианта, зависящего от обобщенных величин $u$, $v$, ..., есть снова инвариант.*

В качестве применения возьмем дискриминант $D$ бинарной кубичной формы. Вследствие отсутствия инвариантов низших степеней он необходимо неприводим. Этот факт надлежит использовать при детальном проведении данного выше в наброске доказательства того, что каждый ковариант выражается через четыре базисных коварианта $D$, $f$, $H$, $t$.

Второе наше замечание нацелено совершенно в другом направлении. Предположим, что рассматриваемые инварианты зависят от нескольких величин $x$, $x'$, ... одного и того же типа, описываемого представлением $A(s)$ степени $n$ (а также, возможно, и от других аргументов).

Теорема (VIII. 5. C). (Теорема Паскаля.) *Инварианты, зависящие от $m$ величин $x$, $x'$, ... одинакового типа $A(s)$ степени $n$, могут быть выражены посредством поляризации и линейной комбинации через инварианты, зависящие не более чем от $n$ таких величин. Привлекая относительный инвариант $[xx'\dots]$, мультипликатор которого равен $|A(s)|$, можно даже свести число аргументов к $n-1$.*

Это предложение является непосредственным следствием тождеств Капелли. Например, изучая одновременные инварианты нескольких бинарных кубичных форм, можно ограничиться четырьмя или даже тремя такими формами.

## 6. Теорема Гильберта о полиномиальных идеалах

Как было указано в § 2 главы II, Гильберт положил в основу доказательства основных теорем теории инвариантов общее предложение относительно полиномиальных идеалов, являющееся одним из простейших и важнейших во всей алгебре. Рассмотрим кольцо $R$, *в котором каждый идеал имеет конечный базис.* Примерами таких колец могут служить поле $k$ или кольцо обыкновенных целых чисел. Теорема Гильберта утверждает, что это свойство не теряется при присоединении неизвестной.

Теорема (VIII.6.A). *Если каждый идеал в кольце $R$ имеет конечный базис, то это же верно и для кольца $R|x|$.*

В этой модернизированной обобщенной форме предложение Гильберта сразу подсказывает и те шаги, которые следует предпринять для его доказательства. За самим доказательством я отошлю читателя к „Современной алгебре“ ван дер Вардена[4]. Повторное применение распространяет эту теорему на кольцо $R[x_1 \ldots x_n]$ полиномов над $R$ от любого числа неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Специализируя $R$ либо как поле $k$, либо как кольцо всех обыкновенных целых чисел, получаем два предложения, сформулированных самим Гильбертом[4]:

Теорема (VIII.6.B). *Если $k$ — поле, то каждый идеал в кольце $k[x_1 \ldots x_n]$ имеет конечный базис. То же остается верным, если заменить $k$ кольцом обыкновенных целых чисел.*

Возьмем любое множество $\mathfrak{S} = \{a\}$ чисел $a$ из кольца $R$, обладающего тем свойством, что каждый идеал в нем имеет конечный базис. Совокупность всех чисел вида

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots, \tag{6.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots$ — любая конечная последовательность элементов из $\mathfrak{S}$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — произвольные элементы из $R$, представляет собой идеал $(\mathfrak{S})$, наименьший идеал, содержащий множество $\mathfrak{S}$. Определив в $(\mathfrak{S})$ конечный базис и выразив каждый из его элементов в форме (6.1), получим конечное множество чисел $a_1, a_2, \ldots, a_h$ из $(\mathfrak{S})$ такое, что каждое число из $\mathfrak{S}$ будет иметь вид

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_h a_h \qquad (\lambda_i \in R).$$

(Однако, поскольку $\mathfrak{S}$ не предполагается идеалом, вовсе не обязательно, чтобы, обратно, каждое число этого вида принадлежало $\mathfrak{S}$.)

## 7. Доказательство первой основной теоремы для $GL(n)$

Для простоты рассмотрим инварианты $J(u)$, зависящие от одной переменной формы (1.1) заданной степени $r$. В кольце $k[u]$ всех полиномов, зависящих от переменных коэффициентов $u_{r_1 \ldots r_n}$, мы рассмотрим множество $\mathfrak{J}$, *состоящее из всех инвариантов $J(u)$, не сводящихся к постоянной* (исключить постоянные весьма важно). Согласно заключительному замечанию предыдущего параграфа, выделим конечное число инвариантов

$$J_1(u), \ldots, J_h(u),$$

не сводящихся к постоянной и таких, что каждый не сводящийся к постоянной инвариант $J(u)$ будет линейной их комбинацией

$$J(u) = L_1(u) J_1(u) + \ldots + L_h(u) J_h(u) \tag{7.1}$$

с полиномиальными коэффициентами $L_i(u)$. Предположим, что $J$; $J_1, \dots, J_h$ однородны, степеней $\mu$; $\mu_1, \dots, \mu_h$. Равенство (7.1) не нарушится, если вычеркнуть в $L_i(u)$ все члены, степень которых отлична от $\mu - \mu_i$, так что мы можем считать коэффициенты в $L_i(u)$ однородными, „правильных“ степеней $\mu - \mu_i$. (Тогда при $\mu_i > \mu$ коэффициент $L_i(u)$ будет нулем.)

Этот первый шаг имеет общую значимость и вовсе не ограничивается классическим случаем. Теперь мы попытаемся показать, что *только что определенные инварианты $J_i(u)$ образуют целый рациональный базис для всех инвариантов*. Этот второй шаг будет специфичен для группы $GL(n)$. Воспользуемся тем же приемом, который послужил для доказательства теоремы Грама. Подставим вместо $u_{r_1\dots r_n}$ в соотношение (7.1) абсолютные коварианты

$$u^*_{r_1\dots rn}(\eta^1, \dots, \eta^n), \tag{1.6}$$

определенные формулой (1.5). Для инварианта $J(u)$ веса $g$ мы имеем

$$J(u^*) = \mathrm{H}^g \cdot J(u),$$

где $\mathrm{H}$ обозначает определитель $[\eta^1 \dots \eta^n]$. Поэтому

$$\mathrm{H}^g \cdot J(u) = L_1(u^*) \cdot \mathrm{H}^{g_1} J_1(u) + \dots + L_h(u^*) \cdot \mathrm{H}^{g_h} J_h(u). \tag{7.2}$$

$\mathrm{H}$ есть ковариант веса $-1$; следовательно, множители $\mathrm{H}^{g_i} L_i(u^*)$ суть коварианты веса $-g_i$. $\Omega$-процесс Кэли

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \eta_1^1} & \dots & \dfrac{\partial}{\partial \eta_n^1} \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta_1^n} & \dots & \dfrac{\partial}{\partial \eta_n^n} \end{vmatrix}$$

превращает ковариант веса $g^*$, зависящий от $n$ контравариантных векторов $\eta^1, \dots, \eta^n$, в ковариант веса $g^* + 1$. Следовательно, подвергнув (7.2) $g$ раз $\Omega$-процессу, мы получим в результате соотношение

$$c_g \cdot J(u) = L_1^*(u) \cdot J_1(u) + \dots + L_h^*(u) \cdot J_h(u), \tag{7.3}$$

где $c_g$ есть постоянная

$$c_g = \Omega^g(\mathrm{H}^g),$$

а

$$L_i^*(u) = \Omega^g \{\mathrm{H}^{g_i} L_i(u^*)\}$$

суть коварианты веса $g-g_l$, или, лучше, поскольку они уже не содержат переменных $\eta^1, \ldots, \eta^n$, — *инварианты* этого веса. Скоро мы убедимся в том, что $c_g \neq 0$. Считая это важное обстоятельство уже доказанным, мы делим (7.3) на $c_g$ и в результате приходим к такой нормировке коэффициентов $L_l(u)$ в (7.1), при которой они становятся *инвариантами*.

Утверждение, что каждый инвариант $J(u)$ степени $\mu$ выражается через инварианты $J_l(u)$, доказывается теперь индукцией по $\mu$. Это утверждение тривиально для $\mu=0$, когда $J(u)$ есть постоянная. Так как каждый из инвариантов $J_l(u)$, по крайней мере, — степени 1, то *инвариантные* коэффициенты $L_l(u)$ в (7.1), только что полученные нами с помощью $\Omega$-процесса, будут степени, *низшей* чем $\mu$; а если они выражаются через инварианты $J_l(u)$, то это же верно и для $J(u)$.

Чтобы показать, что $c_g \neq 0$, заметим, что $\mathrm{H}^g$ есть форма с целыми коэффициентами от переменных $\eta^i_k$ и что $\Omega^g$ — точно такая же форма от дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial \eta^i_k}$. Но если

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum a(i_1 \ldots i_r)\, x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} \qquad (i_1 + \ldots + i_r = s)$$

— любая форма степени $s$, и

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right) = \sum a(i_1 \ldots i_r) \frac{\partial^s}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}},$$

то, как показывает простое вычисление,

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right) f(x_1, \ldots, x_r) = \sum i_1! \ldots i_r!\, a^2(i_1 \ldots i_r).$$

Отсюда следует, что $c_g$ в действительности есть *положительное целое число*.

Рассматривая инварианты $J$, зависящие от нескольких обобщенных величин $u, v, \ldots$, мы можем без какого бы то ни было ограничения общности считать, что сигнатуры $(r_1, \ldots, r_n)$ этих обобщенных величин удовлетворяют условию $r_n \geqslant 0$. Из доказательства обобщенной теоремы Грама ясно тогда, как ввести аналог ковариантов (1.6). Суммируем:

Теорема (VIII.7.A). *Относительные инварианты для полной линейной группы $GL(n)$, т. е. абсолютные инварианты для $SL(n)$, зависящие от нескольких обобщенных величин $u, v, \ldots$, обладают конечным целым рациональным базисом.*

Как было упомянуто в § 2 главы II, вторая основная теорема содержится в следующем общем алгебраическом утверждении:

Теорема (VIII.7.В). *Все соотношения, связывающие заданные полиномы, являются алгебраическими следствиями конечного числа таких соотношений.*

Действительно, если

$$J_1(z_1, \ldots, z_l) = J_1(z), \ldots, J_p(z)$$

— заданные полиномы от любого числа неизвестных $z_1, \ldots, z_l$, то соотношение есть такой полином $R(t_1, \ldots, t_p)$ от $p$ независимых переменных $t_i$, что

$$R(J_1(z), \ldots, J_p(z)) = 0.$$

Соотношения, очевидно, образуют в кольце полиномов идеал, и этот идеал имеет конечный базис [5].

Поле $k$, в котором мы оперируем, всюду здесь может быть любым полем характеристики 0.

## 8. Метод присоединения

Рассмотрим групповую характеристику $(n-1)$-мерной аффинной геометрии:

$$(8.1)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \xi'_1, \\ \xi_i = a_i\xi'_1 + \sum\limits_k a_{ki}\xi'_k \end{cases} \qquad (i, k = 2, \ldots, n),$$

где единственным ограничением, наложенным на $a_i$, $a_{ik}$, является равенство

$$\det_{i, k=2, \ldots, n} (a_{ik}) = 1.$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ суть однородные координаты точки. Аффинная геометрия получается из проективной с полной унимодулярной группой $SL(n)$ путем присоединения „бесконечно удаленной плоскости“

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\xi_i = 1\cdot\xi_1 + 0\cdot\xi_2 + \ldots + 0\cdot\xi_n = 0$$

в качестве абсолюта. Аффинное свойство геометрической системы есть ее проективное отношение к абсолютной плоскости. Это подсказывает способ образования аффинных инвариантов основных форм $u$, $v$, ...: присоединяем к основным формам произвольную линейную форму

$$(8.2)\qquad l: \sum_i l_i \xi_i$$

и строим проективные инварианты $J(u, v, \dots ; l)$ для системы $u, v, \dots ; l$; тогда $J(u, v, \dots ; l)$, очевидно, является абсолютным инвариантом относительно аффинной группы (8.1). Возникает вопрос, все ли аффинные инварианты получаются таким путем. Тогда мы были бы вправе, поскольку это касается инвариантов, рассматривать аффинное пространство как проективное пространство с абсолютной плоскостью [6].

Утвердительный ответ на наш вопрос легко получается путем комбинирования символического метода с построением целого рационального базиса типовых векторных инвариантов для аффинной группы, выполненным в § 7 главы II. Заданный аффинный инвариант $J(u, v, \dots)$ сперва заменяется его символическим выражением, аффинным инвариантом $j(u, u', \dots; v, v', \dots ; \dots)$, зависящим от группы ковариантных векторов $u$, $u', \dots, v$, $v', \dots, \dots$. $j$ выражается через компонентные определители

$$[x \dots yz]_n \quad \text{и} \quad [x \dots y]_{n-1} = [ex \dots y]_n.$$

Вводим произвольную линейную форму (8.2) и заменяем в этом выражении для $j$ каждый компонентный определитель

$$[x \dots y]_{n-1} \quad \text{на} \quad [lx \dots y],$$

тем самым превращая аффинный инвариант $j(u, u', \dots, v, v', \dots, \dots)$ в проективный инвариант $j^*(l; u, u', \dots, v, v', \dots, \dots)$ *). Затем возвращаемся к несимволическому выражению, что возможно, поскольку $j^*$, так же как и $j$, имеет правильные степени по всем аргументам $u$, $u', \dots, v, v', \dots, \dots$ (равные степеням основных форм $u, v, \dots$). Таким образом мы получаем проективный инвариант $J^*(l; u, v, \dots)$, для которого

$$J^*(e; u, v, \dots) = J(u, v, \dots).$$

В § 7 главы II мы обобщили аффинную группу на случай, когда абсолютом служит линейное многообразие не $n-1$, а $n-2$ или $n-3$ или ... измерений. Рассмотрим случай размерности

---

*) $j^*$ может состоять из нескольких членов различных степеней по $l$, где каждый член есть инвариант, однородный относительно $l$, равно как и относительно $u, u', \dots, v, v', \dots, \dots$

$n-2$. $(n-2)$-мерное линейное многообразие $\mathrm{M}_{n-2}$ является пересечением двух плоскостей $l$ и $l'$:

$$\sum_i l_i \xi_i = 0, \quad \sum_i l'_i \xi_i = 0$$

и имеет антисимметричные координаты

$$l_{ik} = l_i l'_k - l'_i l_k. \tag{8.3}$$

Одномерная прямая $\{\xi, \eta\}$, соединяющая две точки $\xi$, $\eta$, пересекает $\mathrm{M}_{n-2}$, если

$$\sum_{i,k} l_{ik} \xi_i \eta_k = 0.$$

Для произвольного антисимметричного (ковариантного) тензора $l_{ik}$ ранга 2 это уравнение определяет *комплекс прямых*. „Специальные“ комплексы прямых $\mathrm{M}_{n-2}$, описываемые формулой (8.3), удовлетворяют квадратичным соотношениям

$$l_{14} l_{23} + l_{24} l_{31} + l_{34} l_{12} = 0, \tag{8.4}$$

(где 1, 2, 3, 4 можно заменить любой четверкой из $n$ индексов 1, 2, ..., $n$). Для интересующей нас группы абсолют является таким специальным комплексом прямых $\mathrm{M}_{n-2}$ с

$$l = e = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad l' = e' = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

или

$$l_{12} = -l_{21} = 1, \quad \text{все остальные } l_{ik} = 0. \tag{8.5}$$

Символическое выражение $j$ инвариантов $J(u, v, \ldots)$ для этой группы будет кроме полного компонентного определителя $[xy \ldots z]_n$ включать компонентный определитель $[x \ldots y]_{n-2}$. Мы заменим последний знакопеременной суммой

$$\frac{1}{2} \sum \pm l_{i_1 i_3} x_{i_3} \ldots y_{i_n},$$

распространенной на все перестановки $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ индексов 1, ..., $n$, которая проективно инвариантна и при специализации (8.5) обращается снова в $[x \ldots y]_{n-2}$. Результатом будет, что инвариант $J(u, v, \ldots)$ от нескольких основных форм $u, v, \ldots$ в аффинном пространстве „ранга 2“ получается путем специализации (8.5) из проективного инварианта, *включающего*, кроме заданной системы основных форм, *произвольный антисиммет-*

*ричный тензор* $l_{ik}$ *ранга* 2 (т. е. комплекс прямых). Чтó мы хотим в этом случае подчеркнуть, это — то обстоятельство, что в качестве нового аргумента в инварианты приходится ввести *произвольный* комплекс прямых; нельзя удовлетворяться произвольным *специальным* комплексом прямых, хотя характеризующие его условия (8.4) и проективно инвариантны.

Если основные формы содержат как греческие, так и латинские переменные, то список типовых базисных векторных инвариантов следует дополнить греческим компонентным определителем и тензором $[\xi\eta]_2$, который мы заменим на $\sum l_{ik}\xi_i\eta_k$. Как показывает эта замена, основной результат остается в силе.

Тот же метод присоединения применим и к важному случаю *ортогональной группы*. Благодаря теории относительности получила широкую известность трактовка ортогональных векторных инвариантов как аффинных векторных инвариантов после присоединения метрической основной формы

$$\sum \gamma_{ik}x_i x_k \quad (\gamma_{ik}=\gamma_{ki}), \tag{8.6}$$

обращающейся в декартовой системе координат в единичную форму

$$\gamma_{ik}=\delta_{ik}. \tag{8.7}$$

Проведенные выше рассмотрения дают обоснование этого способа, если заметить, что любой (четный или нечетный) ортогональный векторный инвариант выражается через компонентные определители $[xy\ \dots\ z]$ и скалярные произведения $(xy)$. Первые инвариантны относительно полной линейной группы, и то же верно для скалярных произведений, если записывать их в виде

$$(xy)=\sum \gamma_{ik}x_i y_k \tag{8.8}$$

и считать зависящими не только от пары ковариантных векторов $x$ и $y$, но и от произвольной (контравариантной!) квадратичной формы (8.6). Инварианты форм для ортогональной группы получаются из инвариантов форм для полной линейной группы путем присоединения сперва к системе основных форм контравариантной квадратичной формы (8.6), а затем специализации (8.7). При желании обойтись без введения контравариантной квадратичной формы (8.6), можно прибегнуть взамен к *ковариантной* квадратичной форме

$$\sum g_{ik}\xi_i\xi_k \quad (g_{ik}=g_{ki}) \tag{8.9}$$

и затем заменить скалярное произведение $(xy)$ проективным инвариантом

$$(8.10) \qquad -\begin{vmatrix} g_{11} \cdots g_{1n} & x_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ g_{n_1} \cdots g_{nn} & x_n \\ y_1 \; \cdots \; y_n & 0 \end{vmatrix}.$$

[(8.10) есть произведение $\det(g_{ik})$ на (8.6), где $\|\gamma_{ik}\|$ — матрица, обратная к $\|g_{ik}\|$.]

Аналогично и для симплектической группы. В каждом случае существование конечного целого рационального базиса устанавливается применением теоремы (VIII.7.A). Замена основных форм любыми *обобщенными величинами* $u$, $v$, ... относительно полной линейной группы не представляет никакого труда. Суммирую:

Теорема (VIII. 8. A). *Для группы ступенчатых преобразований, ортогональной группы и симплектической группы каждый инвариант* $J(u, v, \ldots)$, *где* $u$, $v$, ... — *обобщенные величины, определенные относительно группы* $SL(n)$, *может быть после присоединения к аргументам* $u$, $v$, ... *надлежащего „абсолюта" записан как инвариант относительно группы* $SL(n)$.

Я не хочу умалять это триумфальное достижение символического метода. Однако, в отношении первой основной теоремы, положение дел, устанавливаемое нашим предложением, еще неудовлетворительно, поскольку обобщенные величины для $SL(n)$ не являются ни примитивными, ни наиболее общими величинами для рассматриваемых нами более узких групп. Я не думаю, чтобы в этом отношении можно было многое сделать в аффинном случае. В действительности представления аффинной группы не являются вполне приводимыми и это почти непоправимо усложняет обозрение возможных величин для этой группы. Для ортогональной и симплектической групп кругозор значительно шире. Действительно, „обобщенная величина" будет здесь пробегать тензоры $F$ одного из подпространств, обозначаемых через $P_0(T)$, где $T$ — допустимая диаграмма. Пусть $e$ — производящий идемпотент этого класса симметрии $T$. Тогда мы сперва заменяем аргумент $F$ нашего инварианта $J(F, \ldots)$ на $eF$:

$$J^*(F, \ldots) = J(eF, \ldots),$$

так что $F$ пробегает теперь *все* тензоры из $P_r^0$ (устранение ограничения симметрией). Всякий тензор $F$ ранга $r$ может быть однозначно разложен по теореме (V.6.A), и первое слагаемое $F_0$

с нулевыми следами получается из $F$ применением некоторого линейного оператора $t$:

$$F^0 = tF, \quad F^0(i_1\ldots i_r) = \sum_{(k)} t(i_1\ldots i_r; k_1\ldots k_r) F(k_1\ldots k_r),$$

инвариантного относительно ортогональной группы и перестановочного со всеми операторами из $\mathfrak{A}_r$, а потому принадлежащего алгебре $\omega_r^n$, описанной в § 5 главы V. Очевидно, $t$ — идемпотент. Второй шаг состоит в замене аргумента $F$ в $J^*$, пробегающего все тензоры с нулевыми следами, на $tF$:

$$J^*(tF, \ldots) = J^{**}(F, \ldots).$$

$J^{**}$ теперь — ортогональный инвариант, определенный для *любых* тензоров $F$ ранга $r$ (устранение условия, наложенного на следы). Метод присоединения приводит тогда к проективному инварианту $J^{***}(g_{ik}; F, \ldots)$, в котором к тензорам $F, \ldots$ в качестве аргумента присоединена квадратичная форма (8.9), причем

$$J^{***}(g_{ik}; F, \ldots) = J(F, \ldots) \text{ для } g_{ik} = \delta_{ik} \text{ и } F \in \mathrm{P}_0(r_1\ldots r_n), \ldots$$

Теорема (VIII.8.B). *Пусть* $J(u, v, \ldots)$ — *ортогональные инварианты, зависящие от нескольких ортогональных обобщенных величин* $u, v, \ldots$ *Построением целого рационального базиса для проективных инвариантов* $J(g_{ik}; F, \ldots)$, *в которых каждый аргумент* $u, \ldots$ *заменен свободным тензором* $F$ *соответствующего ранга и к аргументам присоединена квадратичная форма* (8.9), *устанавливается конечный целый рациональный базис и для инвариантов* $J(u, v, \ldots)$. *То же mutatis mutandis* (*с соответствующими изменениями*) *верно и для симплектической группы.*

## В. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

### 9. Групповое ядро и алгебры Ли

Окрестность единичного элемента 1 локально эвклидовой непрерывной группы есть топологический образ эвклидова пространства, в котором композиция применяется лишь к элементам, достаточно близким к центру 1. Назовем такое многообразие *групповым ядром*, предполагая, что композиция, коль скоро она определена, обладает теми же свойствами, что и для непрерывной группы [7]. Каждое ли групповое ядро может быть продолжено до полной группы (образуя на ней некоторую окрестность единичного элемента), — трудный вопрос, лежащий за пределами нашего современного знания. Элементы предполагаемой группы можно было бы ввести как произвольные конечные цепи $a_1 a_2 \ldots a_k$ элементов $a_i$ группового ядра. Трудность лежит в том, чтобы решить, при каких условиях две такие цепи следует отождествить.

Однако, если *существует* группа $\gamma$ с заданным групповым ядром $\gamma_0$, то можно точно установить, до какой степени она определяется ядром. (Если $\gamma$ состоит из нескольких отдельных кусков, то мы принимаем в расчет только кусок, содержащий точку 1, который сам является группой; остальные куски, его смежные классы, считаются вне игры.) Мы имеем здесь перед собой просто частный случай вопроса о том, в какой степени многообразие известно на всем своем протяжении, если оно локально известно в каждой точке [8]. Ответ на этого рода вопрос доставляет *универсальное накрывающее многообразие;* докажем, что оно является непрерывной группой с тем же групповым ядром $\gamma_0$. Эту односвязную группу обозначим теперь через $\gamma$. Каждая группа $\gamma'$ с ядром $\gamma_0$ имеет $\gamma$ своим универсальным накрывающим многообразием. Другими словами, каждое продолжение ядра $\gamma_0$ до целой группы $\gamma'$ получается из наиболее „полной“ такой группы $\gamma$ путем проектирования: берется произвольная дискретная группа $\{S\}$ непрерывных автоморфизмов $S$ многообразия $\gamma$: $p \longrightarrow p'$ без неподвижных точек, и точки группы $\gamma$, эквивалентные относительно $\{S\}$, отождествляются. При этом точки $p$, $p'$ эквивалентны относительно $\{S\}$, если они получаются одна из другой посредством некоторого преобразования $S$ из группы $\{S\}$: $p' = Sp$. Дискретность означает, что никакое множество взаимно эквивалентных точек нигде на $\gamma$ не имеет точки сгущения. Отсутствие неподвижных точек означает, что ни для какого преобразования $S$ из $\{S\}$, отличного от тождественного, не существует точки $p$, для которой бы $Sp = p$. Таким образом, нам надлежит показать следующее: пусть $\gamma$, $\gamma'$ — две группы с общим ядром $\gamma_0$ и пусть $\gamma$ односвязна; тогда существует определенное непрерывное гомоморфное отображение $p \longrightarrow p'$ группы $\gamma$ на $\gamma'$, являющееся тождественным в ядре $\gamma_0$. Функция $p' = \varphi(p)$ строится хорошо известным процессом продолжения, впервые примененным в области аналитических функций Вейерштрассом. Если $\varphi(p) = p'$ известна для точки $p_0$, то в окрестности $p_0$ мы определяем эту функцию формулой

$$\varphi(p_0 a) = p_0' \cdot a,$$

где $a$ — элементы ядра $\gamma_0$. Так, путем последовательных продолжений вдоль какого-нибудь пути, ведущего от 1 к $p$, мы придем к определенному образу $\varphi(p) = p'$ в конечной точке $p$. Вообще говоря, $p'$ будет зависеть не только от конечной точки, но и от пути. Однако, если $\gamma$ односвязна, то продолжение вдоль различных путей, ведущих от 1 к $p$, необходимо приведет к одному и тому же $\varphi(p)$. Рассматривая точку $p' = \varphi(p)$ как „след“ точки $p$, мы превращаем $\gamma$ в (неограниченное, неразветвленное) многообразие, накрывающее $\gamma'$, и группа накрывающих преобразований $S$ группы $\gamma$ над $\gamma'$ строится известным образом.

Все это — не что иное, как топологический прием, к которому всегда обращаются, когда нужно установить связь между происходящим в малом и в большом; лишь один момент специфичен для теории групп, а именно, что *универсальное накрывающее многообразие $\tilde{\gamma}$ непрерывной группы $\gamma$ есть снова непрерывная группа.* Точка $\tilde{p}$ многообразия $\tilde{\gamma}$ определяется точкой $p$ группы $\gamma$ и путем, ведущим на $\gamma$ от центра 1 к $p$. Два пути, ведущие от 1 к $p$, определяют на $\tilde{\gamma}$ одну и ту же точку $\tilde{p}$ в том и только в том случае, если их можно непрерывно деформировать один в другой, не смещая концов 1 и $p$ (или если и тот и другой путь приводит к одной и той же конечной точке на каждом неразветвленном неограниченном многообразии $\gamma^*$ над $\gamma$, в предположении, что они начинаются от одной и той же точки $1^*$). Считая примыкающими к пути, определяющему точку $\tilde{p}$, все пути, начинающиеся в $p$ и лежащие в заданной (эвклидовой) окрестности точки $p$, получаем окрестность точки $\tilde{p}$. Путь описывается непрерывной функцией $p(\lambda)$, аргумент которой $\lambda$ изменяется в интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ вещественной оси, тогда как значения ее $p(\lambda)$ берутся из $\gamma$; путь соединяет 1 и $p$, если $p(0) = 1$, $p(1) = p$. Если точка $\tilde{p}$ над $p$ задана путем $p(\lambda)$, а $\tilde{q}$ над $q$ — путем $q(\mu)$, то мы можем определить $\tilde{p}\tilde{q}$ путем, состоящим из пути $p(\lambda)$ $\{0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$, продолженного путем

$$p \cdot q(\lambda - 1) \quad \{1 \leqslant \lambda \leqslant 2\},$$

получающимся из $q(\mu)$ левым сдвигом на $p$. В совокупности это дает путь, который можно получить из

$$p(\lambda) \cdot q(\mu) \quad \{0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1\},$$

заставляя точку $(\lambda, \mu)$ описывать ломаную $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1)$. Тот же результат даст и ломаная $(0, 0) \to (0, 1) \to (1, 1)$, поскольку одна из этих ломаных может быть деформирована в другую внутри квадрата $\{0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1\}$. Вполне допустимо также вместо этих ломаных взять диагональ квадрата

$$\lambda = \tau, \quad \mu = \tau \quad \{0 \leqslant \tau \leqslant 1\}.$$

Первые два определения показывают, что $\tilde{p}\tilde{q}$ непрерывно по $\tilde{q}$ равномерно относительно $\tilde{p}$ и непрерывно по $\tilde{p}$ равномерно относительно $\tilde{q}$, откуда следует непрерывность по совокупности аргументов $(\tilde{p}, \tilde{q})$. Диагональное же определение показывает, что элемент $\tilde{p}^{-1}$, определяемый путем $p^{-1}(\lambda)$, обратен к $\tilde{p}$.

То же рассуждение, что и примененное нами при построении функции $p' = \varphi(p)$, приводит к заключению, что любая непрерывная реализация, в частности любое непрерывное представление группового ядра $\gamma_0$ может быть однозначным образом продолжено до целой односвязной группы $\gamma$. Однако получающееся в результате представление, вообще говоря, не будет однозначным на „менее полных“ группах $\gamma'$, порождаемых ядром $\gamma_0$.

При определенных условиях дифференцируемости групповое ядро приводится к (и воспроизводится по) его *инфинитезимальным элементам* $a, b, \ldots$, которые образуют не только линейную совокупность, касательную плоскость к группе $\gamma$ в начале 1, но даже некоторого рода алгебру [9]. Кроме сложения и умножения на числа, подчиняющиеся правилам, обычным для всех линейных систем, мы имеем еще умножение $[ab]$ (соответствующее образованию коммутатора $sts^{-1}t^{-1}$ двух групповых элементов $s$, $t$), удовлетворяющее закону дистрибутивности по обоим сомножителям:

$$(9.1) \qquad \begin{array}{c|c} [a+a', b] = [ab] + [a'b] & [a, b+b'] = [ab] + [ab'] \\ [\lambda a, b] = \lambda[ab] & [a, \lambda b] = \lambda[ab] \end{array}$$

($\lambda$ — любое число). Однако взамен закона ассоциативности имеются антикоммутативность

$$(9.2) \qquad [ba] = -[ab]$$

и правило Якоби

$$(9.3) \qquad [a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 0.$$

Числа берутся здесь из континуума K. В честь Софуса Ли такую алгебру называют ныне *алгеброй Ли*. Алгебру Ли, составленную инфинитезимальными элементами группы или группового ядра, мы будем называть *инфинитезимальной группой*. Каждая алгебра Ли $\mathfrak{a}$ над К порождает и однозначно определяет групповое ядро, для которого $\mathfrak{a}$ служит инфинитезимальной группой. Остается, однако, сомнительным, продолжаемо ли групповое ядро до целой группы [9a]. Сам Ли недостаточно отдавал себе отчет в этом последнем пункте, так как его интересы целиком концентрировались на вопросах в малом. Следует подчеркнуть, что, независимо от его значения для непрерывных групп, понятие алгебры Ли применимо к *любому* числовому полю $k$; оно является в такой же степени чисто алгебраическим и так же достойным независимого алгебраического изучения, как и понятие ассоциативных алгебр. Для группы линейных преобразований или матриц „коммутаторным произведением" двух инфинитезимальных элементов $A$, $B$ оказывается

$$[AB] = AB - BA. \tag{9.4}$$

Поэтому отображение $a \longrightarrow A$, где $a$ пробегает алгебру Ли, является представлением этой алгебры матрицами, если из $a \longrightarrow A$, $b \longrightarrow B$ следует

$$a + b \longrightarrow A + B, \quad \lambda a \longrightarrow \lambda A, \quad [ab] \longrightarrow AB - BA$$
$$(\lambda \text{ — любое число}).$$

И это снова — чисто алгебраическое понятие. Очевидно, без наличия законов (9.1—3) всякая надежда на получение точного представления абстрактной алгебры Ли была бы подрезана в корне.

Формула (9.4) является единственным моментом во всей теории Ли, имеющим прямое отношение к нашим исследованиям. Поэтому мы дадим ее доказательство. Интегралообразное повторение инфинитезимального линейного преобразования $A$ приводит к однопараметрической группе $X(s)$ преобразований; для нахождения ее следует проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{ds} = AX$$

с начальным значением $X(0) = E$. Это выполняется с помощью показательной функции $\exp(sA)$, которая для матриц определяется совершенно так же, как и для чисел:

$$\exp A = \lim_{n \to \infty} \left(E + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^{\nu}.$$

Имеем

$$X(s + t) = X(s)\,X(t).$$

Образуем из

$$X(s) = \exp(sA), \qquad Y(t) = \exp(tB)$$

коммутатор

$$Z(s, t) = X(s)\,Y(t)\,X^{-1}(s)\,Y^{-1}(t) = X(s)\,Y(t)\,X(-s)\,Y(-t);$$

нам нужно доказать для него предельное соотношение

$$\frac{Z(s,t)-E}{st} \longrightarrow AB - BA \text{ при } (s, t) \longrightarrow (0, 0).$$

Для любой функции $f(s, t)$, при $s=0$ обращающейся в нуль тождественно по $t$, а при $t=0$ — тождественно по $s$, имеем

$$f(s, t) = \int_0^s \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}\,dt\,ds,$$

в предположении, что производная, стоящая под знаком интеграла, существует и непрерывна, так что

$$\frac{f(s, t)}{st} \longrightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}\right)_{0,0} \text{ при } (s, t) \longrightarrow (0, 0).$$

Чтобы применить это к $Z(s, t) - E$, вычисляем

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial s\,\partial t} = X'(s)\,Y'(t)\,X(-s)\,Y(-t) - X(s)\,Y'(t)\,X'(-s)\,Y(-t) - X'(s)\,Y(t)\,X(-s)\,Y'(-t) + X(s)\,Y(t)\,X'(-s)\,Y'(-t).$$

При $s=0$, $t=0$ это переходит в

$$AB - BA - AB + AB = AB - BA.$$

$\gamma'$ является инвариантной подгруппой группы $\gamma$, если для любого $t$ из $\gamma'$ и любого $s$ из $\gamma$ элемент $sts^{-1}$ или коммутатор $sts^{-1}t^{-1}$ принадлежит $\gamma'$. Соответственно для алгебр Ли: линейное подпространство $\mathfrak{a}'$ из $\mathfrak{a}$ является инвариантной подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}$, если для каждого $x$ из $\mathfrak{a}'$ и каждого $a$ из $\mathfrak{a}$ произведение $[ax]$ лежит в $\mathfrak{a}'$. Таким образом, адэкватным описанием этой ситуации мог бы служить термин „идеал в $\mathfrak{a}$“. Совокупность всех элементов вида $[ab]$ $(a, b \in \mathfrak{a})$ и их линейных комбинаций, очевидно, является такой инвариантной подалгеброй $\mathfrak{a}'$ в $\mathfrak{a}$, соответствующей коммутаторной группе в теории групп; Ли называл эту подалгебру *производной алгеброй*.

## 10. Дифференциальные уравнения для инвариантов. Абсолютные и относительные инварианты

Для полинома $f(x, x', \ldots)$, однородным образом зависящего от компонент каждого из векторов $x, x', \ldots$, и системы

$$a = (A, A', \ldots) \tag{10.1}$$

линейных операторов в соответствующих векторных пространствах можно образовать дифференциал

$$d_a f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x'_j} dx'_j + \ldots,$$

полагая

$$dx = Ax, \quad dx' = A'x', \ldots$$

$f$ есть инвариант относительно системы $a$ инфинитезимальных преобразований, если $d_a f = 0$. Пусть $b = (B, B', \ldots)$ — другая система таких преобразований. Для любых двух чисел $\lambda$ и $\mu$ можно образовать линейную комбинацию

$$\lambda a + \mu b = (\lambda A + \mu B, \lambda A' + \mu B', \ldots).$$

Кроме того, как легко проверить,

$$d_b(d_a f) - d_a(d_b f) = d_{[ab]} f,$$

где $[ab]$ обозначает систему

$$(AB - BA, \quad A'B' - B'A', \ldots).$$

Если поэтому

$$d_a f = 0, \quad d_b f = 0,$$

то одновременно мы должны иметь и

$$d_{\lambda a + \mu b} f = 0, \quad d_{[ab]} f = 0.$$

Это, пожалуй, — быстрейший путь установления трех основных операций инфинитезимальной группы или „алгебры Ли“. Инварианты $f$ характеризуются дифференциальными уравнениями

$$d_a f = 0, \tag{10.2}$$

где $a$ пробегает абстрактную алгебру Ли $\mathfrak{a}$, матрицы же $A, A', \ldots$ в (10.1) суть матрицы, представляющие $\mathfrak{a}$ каждая в своем представлении. Это — снова чисто алгебраическая схема; мы уже пользовались ею для ортогональной группы в главе II.

Относительный инвариант характеризуется уравнениями

$$d_a f = \varkappa_a \cdot f. \tag{10.3}$$

Число $\varkappa_a$, инфинитезимальный мультипликатор, является линейной функцией от $a$, и так как из

$$d_a f = \varkappa_a \cdot f, \quad d_b f = \varkappa_b \cdot f$$

следует

$$d_b(d_a f) - d_a(d_b f) = \varkappa_a \varkappa_b f - \varkappa_b \varkappa_a f = 0,$$

то $\varkappa_{[ab]}$ равно нулю, т. е. *инфинитезимальный мультипликатор $\varkappa_a$ обращается в нуль для всех элементов $a$ производной алгебры $\mathfrak{l}'$.*

Примеры. (1) $SL(n)$. Инфинитезимальная группа $\mathfrak{sl}(n)$ состоит из $n$-строчных матриц со следом 0. Равенства

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

показывают, что для $n \geqslant 2$ производная $\mathfrak{sl}'$ совпадает со всей алгеброй Ли $\mathfrak{sl}$. Следовательно, *существуют только абсолютные инварианты.*

(2) $O(n)$. Ее инфинитезимальная группа состоит из кососимметричных матриц. Обозначая через $S_{ik}$ $\{i \neq k\}$ матрицу, имеющую $+1$ на месте $(ik)$, $-1$ на месте $(ki)$ и нули — на всех остальных местах, легко проверяем, что

$$S_{12}S_{23} - S_{23}S_{12} = S_{31}.$$

Поэтому при $n \geqslant 3$ производная $\mathfrak{o}'(n)$ снова совпадает со всей $\mathfrak{o}(n)$, и относительных инвариантов не существует.

(3) То же верно и для $Sp(n)$ с ее инфинитезимальной группой $\mathfrak{sp}(n)$.

(4) У группы $GL(n)$ инфинитезимальная группа $\mathfrak{l}$ состоит из всех вообще $n$-строчных матриц $A = \|a_{ik}\|$. Пример (1) показывает, что производной $\mathfrak{l}'$ служит $\mathfrak{sl}$. Поэтому инфинитезимальный мультипликатор $\varkappa_A$ должен быть кратен *следу:*

$$\varkappa_A = g(a_{11} + \ldots + a_{nn}). \tag{10.4}$$

Эти результаты относительно алгебр Ли сохраняют силу при любом числовом поле $k$. В случае $k = K$ они влекут за собой определенные следствия для соответствующих непрерывных групп. Допуская для компонент $a_{ik}$ общей матрицы наших групп произвольные *комплексные* значения, следует иметь в виду, что их вещественные и мнимые части надо рассматривать как отдельные параметры, а алгебру Ли — как определенную над K, а не над K$^{+}$, если только не ограничиваться лишь *аналитическими* представлениями, где возможно дифференцирование по комплексным параметрам. Поэтому в примере (4) следует заменить (10.4) утверждением, что $\varkappa_A$ является линейной комбинацией вещественной и мнимой частей следа, или равенством

$$(10.5) \qquad \varkappa_A = g(a_{11} + \ldots + a_{nn}) + g'(\bar{a}_{11} + \ldots + \bar{a}_{nn})$$

с двумя постоянными $g$, $g'$. Следующее замечание состоит в том, что, исходя из инфинитезимальных элементов, можно делать выводы лишь о собственной части группы. Имея это в виду, мы можем выдвинуть утверждение, что группа всех вещественных или унитарных или комплексных унимодулярных преобразований, группа всех вещественных или комплексных собственно ортогональных преобразований и группа всех вещественных или унитарных или комплексных симплектических преобразований не имеют относительных инвариантов. Действительно, каждая из указанных групп состоит из одного куска. Для всей ортогональной группы, охватывающей как собственную, так и несобственную части, мы сталкиваемся с различием между четными и нечетными инвариантами. Что же касается группы всех вещественных линейных преобразований $A$ с положительным определителем $|A|$ или группы всех унитарных преобразований, то находим, что мультипликаторы относительных инвариантов этих групп необходимо имеют вид $|A|^g$, для группы же всех невырожденных комплексных линейных преобразований общий вид мультипликаторов таков:

$$|A|^g |\bar{A}|^{g'};$$

$g$ (и $g'$) — произвольные вещественные или комплексные постоянные. Если потребовать, чтобы представления, а потому и мультипликаторы, были однозначными на всей группе, то для унитарной и полной комплексной групп будут допустимыми лишь целые значения $g$ (и $g'$). Таким образом, топология бросает свою тень на алгебраическую сцену.

(5) Добавим еще один пример: группу всех вещественных преобразований вида

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{matrix} \right\|$$

с положительными определителями $|A_1|$, $|A_2|$ (ступенчатые преобразования). Мультипликатор относительного инварианта необходимо имеет вид

$$|A_1|^{g_1}|A_2|^{g_2},$$

с двумя постоянными показателями $g_1$ и $g_2$.

Метод, которым мы получили эти результаты, предполагает, что мы имеем дело с представлениями, удовлетворяющими условиям дифференцируемости, позволяющим нам переходить к инфинитезимальным элементам (представления Ли). С точки зрения теории непрерывных групп это — серьезный недостаток инфинитезимального подхода. Если, однако, мы изучаем алгебры Ли как таковые, то наши результаты содержат полный, не оставляющий желать лучшего, алгебраический ответ на чисто алгебраический вопрос.

## 11. Унитарный прием

Определение представлений инфинитезимальных групп для классических групп

$$GL(n), \quad SL(n), \quad O(n), \quad Sp(n)$$

есть алгебраическая проблема, в независимое решение которой Э. Картан внес решающий вклад. Естественно ожидать, что в общем случае она более трудна, чем для простейшего случая представлений степени 1, рассмотренного в предыдущем параграфе. Однако наша трактовка представлений унитарно ограниченных групп с помощью метода интегрирования дает нам возможность предсказать результаты, по крайней мере для полей **K** и $\mathbf{K}^{\dagger}$.

Возьмем группу $SL(n)$. Мы скоро увидим, что группа ${}^sU(n)$ всех унимодулярных унитарных преобразований односвязна. Поэтому любое неприводимое представление ее инфинитезимальной группы ${}^s\mathfrak{u}(n)$ приводит к однозначному непрерывному представлению самой группы ${}^sU(n)$, которое должно быть эквивалентно одному из представлений

$$(11.1) \qquad \langle P(f_1 \ldots f_n)\rangle \text{ с } f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n = 0,$$

построенных нами в главе IV [ср. теорему (VII.5.C)].

Сравним теперь ${}^s\mathfrak{u}(n)$ с алгебрами Ли ${}^s\mathfrak{l}(n)$ и ${}^s\mathfrak{r}(n)$ всех комплексных и всех вещественных матриц с нулевым следом. ${}^s\mathfrak{u}(n)$ и ${}^s\mathfrak{r}(n)$ обе получаются из ${}^s\mathfrak{l}(n)$ наложением требования вещественности на некоторые параметры. Но эти ограничения несущественны ни для какой линейной задачи. Мы столкнулись с частным случаем следующей общей ситуации.

Пусть нам задана алгебра Ли $\mathfrak{a}$ с базисом $e_1, \ldots, e_r$ над полем $k$. Расширим это поле до некоторого поля $K$. $\mathfrak{a}$ превращается тогда в алгебру Ли $\mathfrak{a}_K$ над $K$, элементами которой служат все линейные комбинации

$$a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r \tag{11.2}$$

с коэффициентами $\lambda_l$, изменяющимися в $K$. (В нашем случае $k = \mathrm{K}$, $K = \mathrm{K}^{\dagger}$.) Пусть

$$\mathfrak{a} = (e_1, \ldots, e_r), \quad \mathfrak{a}' = (e_1', \ldots, e_r')$$

— две алгебры Ли над $k$, совпадающие после расширения: $\mathfrak{a}_K = \mathfrak{a}'_K$. Эта ситуация возникает, если $e_i'$ выражаются через $e_l$:

$$e_i' = \sum_k \gamma_{ik} e_k \tag{11.3}$$

с коэффициентами $\gamma_{ik}$ из $K$ и $\det(\gamma_{ik}) \neq 0$. Мы будем тогда иметь

$$\lambda_1' e_1' + \ldots + \lambda_r' e_r' = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r,$$

где параметры $\lambda_i$, $\lambda_i'$ связаны друг с другом подстановкой

$$\sum_i \gamma_{ik} \lambda_i' = \lambda_k.$$

Если структура алгебры $\mathfrak{a}$ описывается таблицей умножения для элементов базиса:

$$[e_i e_k] = \sum_{l=1}^{r} a_{ik,l} e_l \qquad \{a_{ik,l} \in k\},$$

то преобразование (11.3) должно быть таково, чтобы коэффициенты $a'$ в

$$[e_i' e_k'] = \sum_l a_{ik,l}' e_l'$$

также лежали в $k$. Любому представлению

$$e_l \longrightarrow A_l \qquad (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r \longrightarrow \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_r A_r)$$

алгебры $\mathfrak{a}$ над $K$ соответствует представление алгебры $\mathfrak{a}'$ над $K$:

$$e_i' \longrightarrow A_i' \qquad \left(A_i' = \sum_k \gamma_{ik} A_k\right)$$

и обратно, так что оба представления совпадают после расширения $k$ до $K$.

В нашем случае мы заключаем, что каждое представление инфинитезимальной группы ${}^s\mathfrak{r}(n)$ вполне приводимо и что никаких других неприводимых представлений, кроме соответствующих представлениям (11.1), нет. Отсюда путем интегрирования вытекает:

Теорема (VIII.11.A). *Каждое представление Ли группы всех вещественных унимодулярных преобразований вполне приводимо. Никаких других неприводимых таких представлений, кроме рациональных, описанных ранее как „обобщенные величины", нет.*

Более сложным является вопрос о выводе всех представлений над $K$ алгебры Ли $\mathfrak{a}_K$ из таких же представлений алгебры $\mathfrak{a}$, когда $\mathfrak{a}_K$ рассматривается как алгебра Ли *над* $k$. Чтобы держаться ближе к интересующему нас здесь случаю, предположим, что $K$ — квадратичное поле над $k$ с определяющим квадратным уравнением

$$x^2-\vartheta=0 \qquad (\vartheta\in k;\ \theta=\sqrt{\vartheta}).$$

Каждое число из $K$,

$$\lambda=\alpha+\beta\theta \qquad (\alpha,\ \beta\in k),$$

имеет своими „$k$-компонентами" $\alpha$, $\beta$ и своим сопряженным $\bar{\lambda}=\alpha-\beta\theta$. Рассматриваемая как алгебра Ли над $k$, $\mathfrak{a}_K$ есть алгебра ранга $2r$ с базисными элементами $e_i$, $\theta e_i$. В заданном $K$-представлении матрица, представляющая элемент (11.2), является линейной комбинацией $k$-компонент коэффициентов $\lambda_i$ или линейной комбинацией величин $\lambda_i$ и $\bar{\lambda}_i$:

$$(\lambda_1A_1+\ldots+\lambda_rA_r)+(\bar{\lambda}_1A_1'+\ldots+\bar{\lambda}_rA_r').$$

Выставляя условие

$$[ab]\longrightarrow AB-BA=[AB],$$

находим, что

$$\mathfrak{A}:\ e_i\longrightarrow A_i \quad\text{и}\quad \mathfrak{A}':\ e_i\longrightarrow A_i' \tag{11.4}$$

должны являться перестановочными друг с другом $K$-представлениями алгебры $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_k$:

$$[A_iA_j']=0.$$

Предположим, что каждое $K$-представление алгебры $\mathfrak{a}$ разбивается на абсолютно неприводимые составляющие. Тогда пары перестановочных представлений (11.4) должны разбиваться на блоки вида

$$\mathfrak{A}\colon\ e_i \to (A_i \times E'), \quad \mathfrak{A}'\colon\ e_i \to (E \times A_i'),$$

где

$$a \to \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_r A_r = S(a)$$

и

$$a \to \lambda_1 A_1' + \ldots + \lambda_r A_r' = S'(a)$$

абсолютно неприводимы; $E$ и $E'$ — единичные матрицы надлежащих степеней. Поэтому наше представление алгебры $\alpha_K$ разбивается на части вида

$$(11.5) \qquad (S(a) \times E') + (E \times S'(\bar{a}))$$
$$(a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r, \quad \bar{a} = \bar{\lambda}_1 e_1 + \ldots + \bar{\lambda}_r e_r).$$

Обертывающая (ассоциативная) алгебра линейной совокупности матриц $S(a)$ является полной матричной алгеброй; то же верно и для $S'(a)$. Обертывающая алгебра совокупности матриц (11.5) содержит каждую матрицу вида

$$(S(a) \times E') \quad \text{или} \quad (E \times S'(a)),$$

а потому и всякую матрицу вида $S(a) \times S'(a')$. Поэтому как прямое произведение двух полных матричных алгебр она сама есть полная матричная алгебра, и каждое представление (11.5) абсолютно неприводимо.

Возвращаясь к нашему частному случаю и убеждаясь из дифференциального уравнения

$$d(x_i y_k) = dx_i \cdot y_k + x_i \cdot dy_k$$

в том, что (11.5) описывает кронекеровское произведение в терминах инфинитезимальных подстановок, мы можем выдвинуть следующее утверждение [10]:

Теорема (VIII.11.B). *Каждое представление Ли комплексной унимодулярной группы вполне приводимо. Неприводимые ее части имеют вид*

$$(11.6) \qquad R(A) \times R'(\bar{A}),$$

*где $R$ и $R'$ — два неприводимых представления типа* (11.1).

Рассуждение, приведшее к теоремам (VIII.11.A.) и (VIII.11.B), проходит и для симплектической группы, так как унитарно ограниченная $Sp(n)$ также односвязна. Однако оно необходимо должно терять силу для $GL(n)$. Представлением инфинитезимальной группы $\mathfrak{u}(n)$ для $n = 1$ служит просто любая индивидуальная матрица, а среди матриц имеются и не являющиеся вполне приводимыми, например, матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Этого не могло бы случиться, если бы универсальное накрывающее многообразие для $U(n)$ было компактно. В действительности, $U(n)$ не односвязна, и ее универсальное накрывающее многообразие состоит из бесконечного множества листов.

И группа вещественных собственно ортогональных преобразований не односвязна, однако ее универсальное накрывающее многообразие состоит лишь из двух листов. Поэтому здесь снова будет иметь место полная приводимость, хотя и следует ожидать существования целой серии представлений инфинитезимальной группы $\mathfrak{o}(n)$, приводящих к двузначным представлениям самой группы. Можно почти с уверенностью предсказать, каковы будут характеры этих двузначных представлений: для них также будут верны наши старые формулы типа (VII.9.10), но в случае $n = 2\nu + 1$ нужно будет кроме систем „полуцелых" чисел допустить и системы целых чисел $(l_1, \ldots, l_\nu)$, в случае же $n = 2\nu$ будем иметь обратное положение[11]. Формула (11.6), где $R$ и $R'$ — либо два однозначных, либо два двузначных представления и, кроме того, надлежащим образом учитывается, что ортогональная группа состоит из двух кусков, дает все однозначные неприводимые представления комплексной ортогональной группы. Результаты, полученные для вещественной ортогональной группы, остаются в силе и для вещественных преобразований, оставляющих инвариантной невырожденную квадратичную форму с любой сигнатурой.

Предположения дифференцируемости, указываемые в теоремах (VIII.11.A) и (VIII.11.B) упоминанием имени Ли, можно устранить путем замены каждого из базисных инфинитезимальных преобразований группы порождаемой им однопараметрической группой. И. Шур[10] выполнил это для $SL(n)$, Э. Мор[12] для $Sp(n)$. В случае $O(n)$ двусвязность вызывает некоторые трудности, помешавшие Р. Брауэру, в его трактовке группы $O(n)$ по описанному образцу, полностью изгнать дух топологии[13]. Другим путем к достижению тех же целей является обращение к общим теоремам о „лиевской" природе линейных групп[14].

## 12. Связность классических групп

Теорема (VIII.12.A). *Группа* ${}^sU(n)$ *унимодулярных унитарных преобразований односвязна.*

Я дам набросок доказательства, которым обязан устному сообщению д-ра Витольда Гуревича; как и в других топологических рассмотрениях, я не буду входить здесь во все детали[15].

${}^sU(n)$ содержит ${}^sU(n-1)$ как подгруппу своих матриц вида

$$U_{n-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & \dots & * \end{Vmatrix}.$$

Два элемента $A$ и $A'$ из ${}^sU(n)$ лево-эквивалентны по модулю этой подгруппы, $A' = A \cdot U_{n-1}$, т. е. принадлежат одному и тому же смежному классу по ${}^sU(n-1)$, в том и только в том случае, если они имеют общий первый столбец

$$(a_1, a_2, \dots, a_n);$$

он является вектором длины 1:

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 = 1. \tag{12.1}$$

При $n \geqslant 2$ любой такой вектор $a$ служит первым столбцом в некотором элементе из ${}^sU(n)$; действительно, всегда можно определить унитарный унимодулярный векторный базис $e_1, \dots, e_n$, первым членом которого служит $a$: $e_1 = a$. Поэтому многообразие рассматриваемых смежных классов топологически эквивалентно $(2n-1)$-мерной сфере (12.1) в эвклидовом пространстве с вещественными координатами $\mathfrak{R}a_i$, $\mathfrak{J}a_i$. Эта сфера односвязна. Замкнутая кривая (цикл) $C$ на ${}^sU(n)$ есть в то же время цикл в многообразии смежных классов. Как таковой мы можем стянуть ее в единичную точку $(1, 0, \dots 0)$ и тем самым деформировать $C$ в цикл на подгруппе ${}^sU(n-1)$. Начатая так индукция по $n$ может быть доведена до $n = 1$. А так как ${}^sU(1)$ состоит из одного лишь элемента 1, то в результате нам удастся тогда шаг за шагом стянуть $C$ в единичную точку на ${}^sU(n)$.

Проведенное рассуждение как раз в этом последнем пункте теряет силу для полной группы $U(n)$. $U(1)$ есть окружность, составленная из всех комплексных чисел, равных по абсолютной величине 1, а окружность бесконечно связна: ее универсальным накрывающим многообразием служит спираль с бесконечным числом витков. Каждый цикл $C$ на $U(n)$ деформируем в $(\sim)$ кратное цикла $C_0$, описываемого элементом

$$A = E_{n-1} \dotplus e(\varphi),$$

когда $\varphi$ изменяется от 0 до 1. Вещественная функция $\Phi$, определенная на $U(n)$ формулой $\det A = e(\Phi)$ (являющаяся многозначной, но не разветвленной), сразу показывает, что никакое кратное цикла $C_0$ не $\sim 0$. Универсальное накрывающее многообразие группы $U(n)$ состоит из бесконечного множества „витков“; его группа накрывающих преобразований является бесконечной дискретной циклической группой.

Рассуждение Гуревича применимо к вещественной собственно ортогональной группе $O^+(n)$ и показывает, что любой цикл на $O^+(n) \sim$ кратному цикла $C_0$, описываемого элементом

$$E_{n-2} \dotplus \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

При $n=2$ никакое такое кратное не $\sim 0$. Однако на $O^+(3)$ и, тем более, на $O^+(n)$ при $n \geqslant 3$, имеем $2C_0 \sim 0$. Это доказывается либо с помощью кватернионного представления вращений в трехмерном пространстве, отображающего трехмерную сферу в четырехмерном пространстве на $O^+(3)$ так, что диаметрально противоположные точки отождествляются, либо с помощью следующей картины. Берем два телесных прямых круговых конуса раствора $\alpha$ с общей вершиной, касающихся по образующей, один из которых неподвижен, а другой катится по нему. Катящийся конус совершает замкнутое движение, совпадающее с $2C_0$ для $\alpha = 90^\circ$ и приближающееся к покою при $\alpha \to 180^\circ$. Таким образом, $2C_0$ непрерывной вариацией параметра $\alpha$ деформируется в точку 1. Пока еще не закрыта возможность самому циклу $C_0$ стать $\sim 0$ для некоторых достаточно больших $n$. Что это, тем не менее, не имеет места, легче всего доказывается прямым построением простейшего из двузначных представлений, так называемого спинорного представления, впервые открытого и описанного в инфинитезимальной форме Э. Картаном. Дирак обнаружил, что спиноры для $n=4$ (четырехмерный пространственно-временной мир) отвечают в квантовой теории вращению электрона; отсюда и наименование*). Существование спиноров является столь важной особенностью ортогональной группы, что

---

*) От английского слова spin — вращение.

в следующем параграфе мы дадим краткое их алгебраическое описание [16].

Унитарная симплектическая группа $USp(n)$, $n=2\nu$, представляет лучший случай применить рассуждение Гуревича; для нее индукция доводится прямо до $n=0$. Смежный класс элемента $A$ из $USp(n)$ по модулю $USp(n-2)$ характеризуется первыми двумя столбцами этого элемента

$$a=(a_1, \ldots, a_n), \quad b=(b_1, \ldots, b_n).$$

Они должны удовлетворять условиям

$$(12.2) \qquad [ab]=1;$$
$$(aa)_H=1, \quad (bb)_H=1, \quad (ab)_H=0.$$

Вводя $\tilde{a}$ по формуле (VI.2.14), видим, что равенство (12.2), т. е.

$$(\tilde{a}b)_H=1,$$

совместимо с

$$(\tilde{a}\tilde{a})_H=1, \ (bb)_H=1$$

лишь если $b=\tilde{a}$. Действительно,

$$(\tilde{a}-b, \tilde{a}-b)_H=(\tilde{a}\tilde{a})_H+(bb)_H-(\tilde{a}b)_H-(b\tilde{a})_H=$$
$$=1+1-1-1=0.$$

Следовательно, в качестве необходимых и достаточных условий получаем:

$$(aa)_H=|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2=1, \quad b=\tilde{a}.$$

Смежные классы образуют многообразие, топологически эквивалентное $(2n-1)=(4\nu-1)$-мерной сфере.

Между прочим, способ Гуревича дает наиболее простой путь вычисления размерности каждой из наших групп.

Теорема (VIII.12.B). *$UO^+(n)$ при $n\geqslant 3$ имеет универсальное накрывающее многообразие, состоящее из двух листов; $USp(n)$ односвязна для каждого $n=2\nu$.*

## 13. Спиноры

Мы избираем тот же исходный пункт, что и Дирак в его классической работе о вращающемся электроне, задаваясь вопросом, нельзя ли рассматривать сумму квадратов $n$ переменных $x_i$ как квадрат линейной формы [17]:

$$(13.1) \qquad x_1^2+\ldots+x_n^2=(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)^2.$$

Коэффициенты $p_i$ должны быть тогда величинами, удовлетворяющими соотношениям

$$(13.2) \qquad p_i^2 = 1, \quad p_i p_k + p_k p_i = 0 \quad (i \neq k).$$

$n$ величин $p_i$ этого рода определяют некоторую некоммутативную ассоциативную абстрактную алгебру $\mathfrak{p}$; в качестве ее базисных элементов мы можем принять $2^n$ одночленов

$$p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} = p_{\alpha_1 \dots \alpha_n},$$

где показатели $\alpha_i$ — целые числа, определенные по модулю 2. Правило умножения таково:

$$p_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot p_{\beta_1 \dots \beta_n} = (-1)^{\delta} p_{\gamma_1 \dots \gamma_n},$$

где

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i, \quad \delta = \sum_{i>k} \alpha_i \beta_k.$$

Рассмотрим сперва *четный* случай $n = 2\nu$ и будем наряду с обозначением $p_1, \dots, p_n$ пользоваться обозначением

$$(13.3) \qquad p_1, q_1, \dots, p_\nu, q_\nu.$$

Положим

$$P_\alpha = 1' \times \dots \times 1' \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times 1 \times \dots \times 1,$$

$$Q_\alpha = 1' \times \dots \times 1' \times \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \times 1 \times \dots \times 1,$$

где число множителей равно $\nu$; матрицы

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

стоят на $\alpha$-вом месте; 1, 1′ означают соответственно

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Эти равенства (знакомые специалисту по квантовой теории из процесса вторичного квантования в случае статистики Ферми) дают представление степени $2^\nu$ нашей алгебры:

$$p_\alpha \to P_\alpha, \quad q_\alpha \to Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots, \nu).$$

Строки и столбцы наших матриц можно отметить знаками + и —. Поэтому в качестве индексов переменных $x_{\sigma_1 \dots \sigma_\nu}$ в пространстве представления служат комбинации знаков $\sigma_\alpha = \pm$. При этом, $iP_\alpha Q_\alpha = R_\alpha$ равно

$$1 \times \ldots \times 1 \times 1' \times 1 \times \ldots \times 1$$

с 1′ на $\alpha$-вом месте. Таким образом,

$$\frac{1}{2}(E \pm R_\alpha), \qquad \frac{1}{2} R_1 \ldots R_{\alpha-1} (P_\alpha \pm iQ_\alpha)$$

имеют вид

$$1 \times \ldots \times 1 \times V \times 1 \times \ldots \times 1,$$

где $V$ на $\alpha$-вом месте есть одна из четырех матриц

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, наше представление алгебры $\mathfrak{p}$ дает *полную матричную алгебру* ранга $2^\nu$. Вследствие совпадения рангов, $2^n = (2^\nu)^2$, это соответствие является взаимно однозначным изоморфизмом.

Выполним теперь произвольное ортогональное преобразование $o$:

$$x_i = \sum_k o(ik)\, x'_k, \qquad p'_i = \sum_k o(ki)\, p_k.$$

$p'_i$ удовлетворяют тем же условиям (13.2), что и $p_i$; поэтому

(13.4) $$p_i \to P'_i = \sum_k o(ki)\, P_k$$

также является неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{p}$. Но из теоремы (III.3.E) мы знаем, что полная матричная алгебра обладает лишь одним, в смысле эквивалентности, таким представлением. Другими словами, существует неособенная матрица $S(o)$, определенная с точностью до численного множителя однозначно, такая, что

(13.5) $$P'_i = S(o)\, P_i S^{-1}(o) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Для пары ортогональных преобразований $o$, $o'$ имеем

(13.6) $$S(oo') = \varkappa S(o)\, S(o'),$$

где $\varkappa$ — численный множитель, зависящий от $o$ и $o'$. Действительно, из

$$\sum_l o'(li)\, P_l = S(o')\, P_i S^{-1}(o'),$$

образуя (13.5), получаем:

$$\sum_l o'(li)\, P'_l = S(o)\, S(o')\, P_i S^{-1}(o')\, S^{-1}(o),$$

а согласно (13.4) левая часть есть

$$\sum_k oo'(ki)\, P_k,$$

что, с другой стороны, равно

$$S(oo')\, P_i S^{-1}(oo').$$

Коротко говоря, $S(o)$ есть „проективное" представление группы $O(n)$.

До сих пор все вполне проходит в любом поле $k$, к которому присоединен $\sqrt{-1}$. Теперь же мы попытаемся так нормировать произвольный масштабный множитель в $S(o)$, чтобы превратить проективное представление в обыкновенное „аффинное". Транспонированная матрица $P_i^*$ снова удовлетворяет условиям (13.2), и потому существует матрица $C$ такая, что

$$P_i^* = CP_i C^{-1}. \tag{13.7}$$

Матрицу $C$ можно без труда выписать явно:

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \times \cdots$$

Из равенства (13.5) следует

$$\sum_k o(ki)\, P_k^* = \hat{S}(o)\, P_i^* \hat{S}^{-1}(o),$$

и, в силу (13.7),

$$C^{-1}\hat{S}(o)\, C$$

есть также решение уравнений (13.5) для $S(o)$. Поэтому

$$\hat{S}(o) = \rho \cdot CS(o)\, C^{-1}.$$

При замене $S(o)$ на $\lambda S(o)$, $\hat{S}(o)$ умножается на $\frac{1}{\lambda}$, а $\rho$ заменяется на $\frac{\rho}{\lambda^2}$. Взяв $\lambda = \sqrt{\rho}$, мы нормируем масштабный множитель так, что $S(o)$ будет удовлетворять условиям

$$\hat{S}(o) = CS(o)\, C^{-1}.$$

Знак в $\pm S(o)$ остается еще неопределенным. Так как и $X = S(o)\overline{S}(o')$ и $S(oo')$ удовлетворяют нормированному условию

$$\hat{X} = CXC^{-1},$$

то множитель $\varkappa$ в (13.6) равен $\pm 1$. Тем самым мы вместо проективного получили обыкновенное, хотя и двузначное, представление $\pm S(o)$ степени $2^{\nu}$; оно и называется *спинорным представлением.*

Выполненное нами нормирование предполагает возможность *извлечения квадратных корней.* Построения в эвклидовой геометрии с помощью линейки и циркуля алгебраически эквивалентны применению четырех арифметических действий и извлечению квадратных корней. На этом основании поле, в котором разрешимо каждое квадратное уравнение $x^2 - \rho = 0$, называют *эвклидовым.* Наш результат состоит тогда в том, что *спинорное представление можно построить в любом эвклидовом поле*; эвклидова природа поля существенна. Ортогональные преобразования являются автоморфизмами эвклидова векторного пространства. Лишь обладая спинорами, мы достигаем того уровня в теории представлений этих автоморфизмов, на котором сам Эвклид, размахивая линейкой и циркулем, так искусно лавировал в стране геометрических фигур. Эвклидова геометрия должна быть глубоко связана с существованием спинорных представлений.

Оперируя в поле $K^{\dagger}$, легко убеждаемся в том, что диагональное преобразование $o$ из $UO(n)$:

$$p_{\alpha} \pm iq_{\alpha} \longrightarrow e(\pm \varphi_{\alpha}) \cdot (p_{\alpha} \pm iq_{\alpha})$$

представляется следующим диагональным $S(o)$:

$$x_{\sigma_1 \dots \sigma_\nu} \longrightarrow e\left(\frac{1}{2}(\sigma_1\varphi_1 + \dots + \sigma_\nu\varphi_\nu)\right) \cdot x_{\sigma_1 \dots \sigma_\nu}.$$

Это показывает, что когда $o$ совершает оборот по окружности

$$C_0\colon \varphi_0 = \dots = \varphi_{\nu-1} = 0; \quad 0 \leqslant \varphi_\nu \leqslant 1,$$

то $S(o)$, непрерывно изменяясь, меняет знак. *Поэтому $O^{+}(n)$ наверняка не односвязна.* Характер спинорного представления оказывается равным сумме

$$\sum e\left(\frac{1}{2}(\pm \varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \dots \pm \varphi_\nu)\right),$$

распространенной на все комбинации знаков, — формула, подтверждающая нашу догадку об общей природе характеров двузначных представлений.

Видоизменения, требуемые при $n=2\nu+1$, не очень серьезны. К величинам (13.3) мы присоединяем еще $p=p_n$, представляемое матрицей

$$P_n=1'\times 1'\times\dots\times 1'.$$

Тогда произведение всех наших $P$ в порядке $P_1Q_1\dots P_\nu Q_\nu P_n$ равно $i^\nu E$. Дополнение формул (13.2) еще соотношением

$$i^{-\nu}p_1\dots p_n=1$$

сводит ранг $2^n=2\cdot(2^\nu)^2$ алгебры $\mathfrak{p}$ к $(2^\nu)^2$, и наше представление взаимно однозначно и изоморфно отображает тогда ее на полную матричную алгебру ранга $2^\nu$. Так как из (13.4) следует

$$P_1'\dots P_n'=\det(o(ik))\cdot P_1\dots P_n,$$

то мы в состоянии каждому ортогональному преобразованию $o$ отнести матрицу $S(o)$ порядка $2^\nu$ так, чтобы

$$\pm P_i'=S(o)P_iS^{-1}(o),$$

где знак $+$ или $-$ имеет место соответственно тому, является ли $o$ собственно или несобственно ортогональным.

По поводу дальнейших подробностей, включая случай неопределенной основной метрической формы, столь важной для физики, см. цитированную выше работу Р. Брауэра и автора.

## 14. Конечный целый рациональный базис для инвариантов компактных групп

Мы переходим теперь к тому существенному пункту раздела B настоящей главы, которому подчинены все остальные рассмотрения этого раздела.

Теорема (VIII.14.A). *Инварианты (абсолютные) $J(x,y,\dots)$, соответствующие заданному множеству представлений конечной или компактной группы Ли, обладают конечным целым рациональным базисом.*

На основании теоремы Гильберта о полиномиальных идеалах выбираем сперва среди инвариантов, не сводящихся к постоянной, конечное число

$$J_1(x,y,\dots),\dots,J_h(x,y,\dots) \tag{14.1}$$

таких, что все указанные инварианты $J(x,y,\dots)$ являются их линейными комбинациями с полиномиальными коэффициентами:

$$J(x,y,\dots)=\sum^{h}L_i(x,y,\dots)J_i(x,y,\dots). \tag{14.2}$$

Следующим шагом было бы изобретение линейного процесса $\omega(L)$, переводящего каждый полином $L$ в инвариант и, кроме того, удовлетворяющего условиям

$$\omega(1)=1, \quad \omega(L\cdot J)=\omega(L)\cdot J$$

для каждого инварианта $J$. Обладая таким процессом, выводим из (14.2):

$$J=\sum_i \omega(L_i)\,J_i.$$

Так как $\omega(L_i)$ — инварианты, то индукцией по степени докажем, что каждый инвариант выражается через базис (14.1).

*Процесс* $\omega$ *требуемой природы дается усреднением по групповому многообразию:*

$$\omega(L)=\mathfrak{M}_s(sL).$$

Оно действует в любой конечной группе (в предположении, что числовое поле не есть поле простой характеристики, делящей порядок группы), а также в любой компактной группе Ли. Оно действует во всех вообще компактных группах, поскольку они допускают меру Хаара; наконец, оно действует в какой угодно группе, если ограничиться неймановскими почти периодическими представлениями. Наиболее важным примером, кроме конечных групп, служат вещественная ортогональная группа $O(n)$ над вещественным полем K и ее двухлистное универсальное накрывающее многообразие.

В случае классических групп над K или K$^\dagger$ описанный способ применяется после того, как введено унитарное ограничение. С помощью рассуждений, проведенных в § 11, можно снова освободиться от этого ограничения, либо заменить его некоторым другим условием вещественности. В результате получаем:

Теорема (VIII.14.B). *Инварианты классических групп, соответствующие любым представлениям Ли над* K, *обладают конечным целым рациональным базисом.*

В действительности, мы доказали это раньше путем подробного алгебраического исследования, основывавшегося на явном определении всех представлений Ли, на $\Omega$-процессе Кэли и методе присоединения. Но преимущества метода интегрирования, его непосредственность и общность относительно природы группы, очевидны. Большим его недостатком является то, что он имеет силу лишь в одном поле K. Кроме того, группа *ступенчатых преобразований*, которую мы до некоторой степени смогли охватить методом присоединения, определенно находится за пределами достижимого методом интегрирования. Действительно, там, где метод интегрирования применим, непосредственно или же через посредство унитарного приема, он устанавливает и полную приводимость и существование конечного целого рационального базиса для инвариантов. Но первое предложение просто неверно для только что упомянутой группы. Нам неизвестно ни одного примера, где первая основная теорема об инвариантах была бы неверна; но и доказательство ее, справедливое для всех вообще групп, в равной степени неизвестно [18].

## 15. Первая основная теорема для конечных групп

Элементарное доказательство для конечных групп, не зависящее от общей теоремы Гильберта о полиномиальных идеалах, дала Э. Нетер [19]. Вот предложенное ею прямое построение, в применении к заданной группе линейных подстановок

$$A^{(\alpha)}\colon\ x^{(\alpha)} = A^{(\alpha)}x, \quad x_i^{(\alpha)} = \sum_k a_{ik}^{(\alpha)} x_k \qquad (15.1)$$
$$(i, k = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, h).$$

Записываем любой инвариант $J(x)$ в виде

$$J(x) = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{h} J(x^{(\alpha)})$$

и рассматриваем правую часть, как функцию от $nh$ независимых переменных $x_i^{(\alpha)}$. В качестве таковой она является симметрической функцией от $n$ векторов

$$\mathfrak{x}_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(h)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{x}_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(h)})$$

$h$-мерного векторного пространства в смысле, определенном в § 3 главы II, и тем самым выражается через поляризованные элементарные симметрические функции. Эти функции можно определить как коэффициенты $G_{r_1 \ldots r_n}$ в произведениях

$$\prod_{\alpha=1}^{h} \{u + u_1 x_1^{(\alpha)} + \ldots + u_n x_n^{(\alpha)}\} = \sum u^r u_1^{r_1} \ldots u_n^{r_n}\, G_{r_1 \ldots r_n}(x_i^{(\alpha)})$$
$$(r + r_1 + \ldots + r_n = h),$$

содержащих, кроме $x_i^{(\alpha)}$, неизвестные $u, u_1, \dots, u_n$ и образованных для всех возможных комбинаций из аргументов $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n$. Функции, получаемые из

$$G_{r_1 \dots r_n}(x_i^{(\alpha)})$$

путем подстановки (15.1), образуют целый рациональный базис для инвариантов нашей конечной группы. Все они — степеней $\leqslant h$ и число их есть

$$\frac{(h+1)\dots(h+n)}{1\cdot 2\dots n}.$$

Ничего более явного нельзя было бы и требовать.

## 16. Инвариантные дифференциалы и числа Бетти компактных групп Ли

Одним из наиболее красивых применений метода интегрирования является теория Э. Картана инвариантных дифференциалов на компактных группах Ли [20]. В заключение этой главы мы дадим общий очерк основных идей этой теории.

На дифференцируемом многообразии с координатами $x_1, \dots, x_n$ можно рассматривать скалярное поле $f(x)$, или дифференциальную линейную форму

$$\sum_i f_i(x)\, dx_i, \tag{16.1}$$

зависящую от линейного элемента $dx$, или дифференциальную линейную форму ранга 2,

$$\sum_{i,k} f_{ik}(x)\, dx_i\, \delta x_k,$$

предполагаемую косо-симметричной и тем самым зависящей от двумерного элемента с компонентами

$$dx_i \delta x_k - \delta x_i dx_k,$$

натянутого на два линейных элемента $dx$, $\delta x$. Продолжая так дальше, мы образуем *„дифференциалы“* рангов $p = 0, 1, 2, \dots, n$. Дифференциальные формы указывают, как следует преобразовывать их коэффициенты $f$ при переходе к другим координатам. Существует процесс *дифференцирования*, не зависящий от системы координат и хорошо знакомый всякому, кто когда-либо изучал максвелловскую теорию электромагнитного поля: производной от скаляра $f$ является градиент

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

производная от дифференциала (16.1) ранга 1 дается формулой

$$f_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_k},$$

и вообще, производная $\omega'$ от формы $\omega$ с косо-симметричными компонентами $f_{i_1 \dots i_p}$ имеет компоненты

$$\frac{\partial f_{i_2 \dots i_{p+1}}}{\partial x_{i_1}} - + \dots$$

(знакопеременная сумма $p+1$ членов). Дифференцирование повышает ранг формы на 1. Дифференциал $\omega_p$ ранга $p$ может быть проинтегрирован по $p$-цепи $C_p$. Общая теорема Стокса устанавливает, что интеграл от производной $\omega'_p$ по $(p+1)$-цепи $C_{p+1}$ равен интегралу от $\omega_p$ по $p$-циклу $C'_{p+1}$, ограничивающему $C_{p+1}$.

Дифференциал $\omega$, производная которого равна нулю, называется *точным*. Что мы подразумеваем под записью $\omega \sim 0$ ($\omega$ гомологично нулю), можно пояснить двумя путями [21]: либо дифференциально, как указание, что $\omega$ есть производная от дифференциала ближайшего низшего ранга, либо интегрально, как требование, чтобы интеграл от $\omega$ по любому циклу был равен нулю. Каждый дифференциал $\sim 0$ является точным; это легко доказывается обоими способами. Понятия дифференциала, точного и $\sim 0$, совпадают „в малом", но не в большом. Изучение точных дифференциалов и их гомологий является оборотной или контрагредиентной стороной изучения циклов, в котором место границы занимает производная. Некоторые недавние продвижения в основаниях топологии были достигнуты путем выдвижения аспекта двойственности и „топологизации" этих операций с дифференциалами. Во всяком случае, *число Бетти* $B_p$ может быть истолковано как число точных дифференциалов ранга $p$, линейно независимых в смысле гомологии [22].

Примем теперь, что наше многообразие есть компактная группа Ли. Дифференциал $\omega$ называется *инвариантным*, если он остается неизменным при левых и правых сдвигах:

$$x \longrightarrow sx \text{ и } x \longrightarrow xs.$$

Так как левыми сдвигами можно перевести начало 1 в любую другую точку, то достаточно знать инвариантный дифференциал в начале, где он является косо-симметричной полилинейной формой

$$(16.2) \qquad \sum_{(i)} a_{i_1 \ldots i_p} \delta_1 x_{i_1} \ldots \delta_p x_{i_p}$$

с постоянными коэффициентами $a$, зависящей от $p$ инфинитезимальных групповых элементов $\delta_1 x, \ldots, \delta_p x$. Требование инвариантности и относительно правых сдвигов означает, что форма (16.2) инвариантна относительно присоединенной группы

$$\delta x \to s^{-1} \cdot \delta x \cdot s.$$

Поэтому инвариантные дифференциалы суть как раз те инварианты присоединенной группы, которые мы рассматривали в § 11 главы VII. Числами линейно независимых среди них для различных рангов $p$ служат коэффициенты полинома Пуанкарэ, вычисляемого по формуле (VII.11.2).

Следующие три факта устанавливают тесную связь между рассмотрением произвольных точных дифференциалов с точностью до гомологии и инвариантных дифференциалов с точностью до равенства:

Лемма (VIII.16.A). (1) *Каждый инвариантный дифференциал является точным.*

(2) *Каждый точный дифференциал гомологичен некоторому инвариантному.*

(3) *Инвариантный дифференциал, который* $\sim 0$, *необходимо равен* 0.

(1) доказывается просто прямым вычислением производной инвариантного дифференциала $\omega$.

(2) может быть получено либо (a) интегральным, либо (b) дифференциальным способом.

(a) Проинтегрируем $s\omega$, дифференциал, получающийся из $\omega$ с помощью левого сдвига $s$, по заданному $p$-циклу $C$. Очевидно, имеем

$$\int_C s\omega = \int_{s^{-1}C} \omega.$$

$s^{-1}C$ получается из $C$ непрерывной деформацией посредством перехода от 1 к $s^{-1}$ вдоль непрерывного пути. Интеграция точного дифференциала $\omega$ по любым двум циклам $C$, $C'$, диформируемым один в другой, приводит к одному и тому же интегралу:

$$\int_C \omega = \int_{C'} \omega.$$

В частности,

$$\int_C s\omega = \int_{s^{-1}C} \omega = \int_C \omega.$$

Следовательно, среднее значение

$$\phi = \mathfrak{M}_s(s\omega)$$

будет $\sim \omega$. Дифференциал $\phi$ лево-инвариантен. Подвергая $\phi$ правым сдвигам, таким же способом получаем, что

$$\mathfrak{M}_{s'}\mathfrak{M}_s(s\omega s') \sim \omega;$$

дифференциал, стоящий в левой части, уже двусторонне инвариантен.

(b) Для любого *инфинитезимального* $s$ легко можно определить инфинитезимальный дифференциал $\varphi$ ранга $p-1$ так, чтобы получилось $s\omega - \omega = \varphi'$.

(3) Если инвариант $\omega$ является производной, $\omega = \varphi'$, то $\omega = s\omega s'$ есть производная от $s\varphi s'$, а тем самым — и от инварианта

$$\phi = \mathfrak{M}_{s'}\mathfrak{M}_s(s\varphi s').$$

Согласно пункту (1), производная от инвариантного дифференциала $\phi$ равна нулю.

Из нашей леммы следует, что число Бетти, т. е. число *точных* дифференциалов, линейно независимых в смысле *гомологии*, равно числу *инвариантных* дифференциалов, линейно независимых в смысле *равенства*. Отсюда:

Теорема (VIII.16.B). *Коэффициенты полинома Пуанкарэ компактной группы Ли дают ее числа Бетти.*

Из этой связи легко извлекается совершенно неожиданный запас сведений относительно чисел Бетти $B_1, B_2, \ldots$ компактной $r$-параметрической группы Ли. Так как число линейно независимых косо-симметричных полилинейных форм (16.2), безразлично — инвариантных относительно присоединенной группы или нет, равно биномиальному коэффициенту $\binom{r}{p}$, то имеем:

$$B_p \leqslant \binom{r}{p}.$$

С другой стороны, пусть

$$\sum_i a_i'\delta x_i, \ \ldots, \ \sum_i a_i^{(p)}\delta x_i \tag{16.3}$$

— любые $p$ инвариантных форм ранга 1. Равенство

$$a_{i_1 \ldots i_p} = \begin{vmatrix} a'_{i_1} & \ldots & a'_{i_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(p)}_{i_1} & \ldots & a^{(p)}_{i_p} \end{vmatrix} \tag{16.4}$$

определяет тогда *инвариантную* форму ранга $p$. В то время, как формы (16.3) изменяются в линейном многообразии размерности $B_1 = \beta$, эти специальные формы (16.4) ранга $p$ пробегают многообразие размерности $\binom{\beta}{p}$. Таким образом,

$$B_p \geqslant \binom{\beta}{p}.$$

Рассматривая те из линейных инвариантов ранга $p = p_1 + p_2$, которые получаются из любой пары инвариантных форм рангов $p_1$ и $p_2$ путем умножения (определенного в § 11 главы VII), получим дальнейшие неравенства того же типа.

Что касается унитарно ограниченных классических групп, то их числа Бетти [23] определяются из явных формул для их полиномов Пуанкарэ, теоремы (VII.11.A) и (VII.11.C).

## *ГЛАВА IX*

# СНОВА О МАТРИЧНЫХ АЛГЕБРАХ

### 1. Автоморфизмы

Чтобы закруглить наши исследования, мы вновь возвращаемся в этой главе к предмету раздела А главы III — изучению вполне приводимых матричных алгебр[1]. Использованный там метод может быть применен к трем относящимся к ним важным вопросам: об автоморфизмах, умножении алгебр и расширении основного поля $k$.

Возьмем простую алгебру $\mathfrak{a}$ над $k$ и ее неприводимое представление $a \longrightarrow A(a)$. Пусть $a \longrightarrow a'$ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{a}$. Тогда $a \longrightarrow A(a')$ также является неприводимым представлением этой алгебры. Но мы видели [теорема (III.3.E)], что имеется лишь одно, в смысле эквивалентности, такое представление. Поэтому существует неособенная матрица $H$ такая, что

$$A(a') = H \cdot A(a) \cdot H^{-1}$$

для всех элементсв $a$ из $\mathfrak{a}$:

Лемма (IX.1.A). *Любой автоморфизм $A \longrightarrow A'$ неприводимой матричной алгебры $\mathfrak{A}$ порождается некоторой постоянной неособенной матрицей $H$:*

$$A' = HAH^{-1}.$$

Рассмотрим любую матричную алгебру $\mathfrak{A} = \{A\}$. Если постоянная неособенная матрица $H$ преобразует каждый элемент $A$ из $\mathfrak{A}$ в элемент

$$A' = HAH^{-1} \tag{1.1}$$

снова из $\mathfrak{A}$, то $A \longrightarrow A'$ является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$. Одновременно равенство

$$B' = HBH^{-1}$$

переводит каждый коммутатор $B$ алгебры $\mathfrak{A}$ снова в коммутатор и тем самым определяет автоморфизм и в коммутаторной алгебре $\mathfrak{B}$.

Таким образом, мы приходим к изучению *одновременных автоморфизмов* алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — вполне приводимая матричная алгебра, а $\mathfrak{B}$ — ее коммутаторная алгебра. $\mathfrak{B}$ точно так же вполне приводима, связь алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ взаимна, и структура их описывается теоремой (III.5.B). Пересечение $\mathfrak{Z}$ алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называется *центром*; оно состоит из тех элементов алгебры $\mathfrak{A}$, которые перестановочны со всеми ее элементами. Если центр содержит лишь численные кратные единичного элемента $E$, то алгебра $\mathfrak{A}$ называется *нормальной* (и таковой же является $\mathfrak{B}$). Наше второе определение центра показывает, что это свойство можно приписать и абстрактной алгебре. Если фиксированная неособенная матрица $H$ порождает в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ автоморфизмы $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$,

$$A' = HAH^{-1}, \quad B' = HBH^{-1}, \tag{1.2}$$

то в пределах центра $\mathfrak{Z}$ они, очевидно, совпадают. Нашей целью является доказательство обратного предложения:

Теорема (IX.1.B). *Любые два автоморфизма*

$$A \rightarrow A', \quad B \rightarrow B' \tag{1.3}$$

***вполне приводимой матричной алгебры $\mathfrak{A}$ и ее коммутаторной алгебры $\mathfrak{B}$, совпадающие внутри центра $\mathfrak{Z}$, порождаются одной и той же неособенной матрицей $H$:***

$$A' = HAH^{-1}, \quad B' = HBH^{-1}. \tag{1.2}$$

В нашем восхождении в разделе A главы III мы впервые достигли полной взаимности между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в конце § 4:

$$\mathfrak{A} = s\left[(\mathfrak{d})_t\right], \quad \mathfrak{B} = \left[t(\mathfrak{d}')\right]_s. \tag{1.4}$$

Образуем теперь линейную оболочку $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ всех произведений

$$C = AB = BA \qquad (A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}).$$

Из схем (III.4.10) общих матриц $A$ и $B$ сразу заключаем, что

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}_{st},$$

где $\mathfrak{D} = (\mathfrak{d})(\mathfrak{d}')$ есть линейная оболочка всех преобразований в $\mathfrak{d}$,

$$(a)(b)'\colon\ x' = axb,$$

соответствующих произвольным элементам $a$, $b$ из $\mathfrak{d}$. Алгебра $\mathfrak{D}$, очевидно, неприводима, поскольку содержит неприводимое множество $(\mathfrak{d})$. Каждый коммутатор алгебры $\mathfrak{D}$ перестановочен, в частности, с любым $(a)$: $x \rightarrow ax$ и потому имеет вид $x \rightarrow xj$, где $j$ — образ единицы из $\mathfrak{d}$. Аналогично, вследствие его перестановочности со всеми $(b)'$: $x \longrightarrow xb$, заданный коммутатор должен иметь вид $x \longrightarrow jx$. Следовательно, $jx = xj$, т. е. $j$ лежит в центре $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{d}$. $\mathfrak{z}$ есть коммутативная алгебра с делением, т. е. поле конечной степени $\delta$ над $k$. Расширив $k$ до $\mathfrak{z}$, мы можем рассматривать $\mathfrak{d}$ как алгебру с делением ранга $m = \frac{d}{\delta}$ над полем $\mathfrak{z}$. Центром алгебры $\mathfrak{D}$ в ее конкретной форме является $m\cdot(\mathfrak{z})$, и применение теоремы (III.4.B) к неприводимой алгебре $\mathfrak{D}$ показывает, что

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{z})_m. \tag{1.5}$$

Таким образом, центр $\mathfrak{Z}$ алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и их произведение $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ задаются формулами

$$\mathfrak{Z} = g\cdot(\mathfrak{z}), \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{z})_g \qquad [g = mst].$$

Как видим из сравнения этих формул с (1.4), положение дел для пары перестановочных алгебр $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{C}$ значительно проще, чем для алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Рассмотрим сперва частный случай *нормальности* $\mathfrak{d}$ (или $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$). Тогда формула (1.5) показывает, что $\mathfrak{D}$ есть полная матричная алгебра $\mathfrak{M}_d$:

Лемма (IX.1.C). Пусть $\mathfrak{d}$ — *нормальная алгебра с делением. Линейная оболочка всех преобразований в* $\mathfrak{d}$,

$$x' = axb,$$

*соответствующих произвольным элементам* $a$, $b$ *из* $\mathfrak{d}$, *является полной матричной алгеброй* $\mathfrak{M}_d$.

$\mathfrak{C}$ есть теперь полная алгебра матриц порядка $g = dst$,

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_g.$$

Этот результат находится в согласии с соотношением (III.4.12). Пусть

$$A_\lambda \ (\lambda = 1, \ldots, dt^2), \quad B_\mu \ (\mu = 1, \ldots, ds^2),$$

соответственно, — линейные базисы алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Мы нашли, что матрицы $A_\lambda B_\mu$ линейно независимы и образуют базис для $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_g$. Построим с помощью наших заданных автоморфизмов $A \longrightarrow A'$, $B \longrightarrow B'$ алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответствующий автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}_g$ по формуле

$$\sum \zeta_{\lambda\mu} A_\lambda B_\mu \longrightarrow \sum \zeta_{\lambda\mu} A'_\lambda B'_\mu \qquad (\zeta_{\lambda\mu} \text{ — любые числа}),$$

относящей произведению $AB$ произведение $A'B'$. Применяя лемму (IX.1.A) к полной матричной алгебре $\mathfrak{M}_g$, заключаем, что этот автоморфизм порождается некоторой постоянной неособенной матрицей $H$,

$$A'B' = H \cdot AB \cdot H^{-1},$$

которая, тем самым, удовлетворяет в частности ($B$ или $A = E$) соотношениям (1.2) для всех $A$ из $\mathfrak{A}$ и $B$ из $\mathfrak{B}$.

Таким образом, с помощью простого приема образования произведений $AB$ нам удалось значительно уточнить лемму (IX.1.A), хотя она и вошла в наше доказательство лишь взятая для частного случая полной матричной алгебры. При комбинации тождественного автоморфизма $B' = B$ алгебры $\mathfrak{B}$ с заданным автоморфизмом $A \to A'$ алгебры $\mathfrak{A}$, наше $H$ будет перестановочно со всяким $B$ и *потому будет лежать в* $\mathfrak{A}$. Мы выразим этот красивый результат в абстрактных терминах [2]:

Теорема (IX.1.D). *Любой автоморфизм нормальной простой алгебры является внутренним.*

Следующий шаг состоит в устранении предположения нормальности алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

$$A_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, mt^2)$$

образуют базис $\mathfrak{A}$ над $\mathfrak{Z}$, если каждое $A$ из $\mathfrak{A}$ однозначно выражается в виде $\sum Z_\lambda A_\lambda$ с „коэффициентами“ $Z_\lambda$ из $\mathfrak{Z}$. Если $A_\lambda$, $B_\mu$ — базисы алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ над $\mathfrak{Z}$, то каждая матрица из $\mathfrak{C}$ однозначно выражается в виде

$$\sum Z_{\lambda\mu} A_\lambda B_\mu \qquad (Z_{\lambda\mu} \in \mathfrak{Z}).$$

Если (1.3) — заданные автоморфизмы алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, *совпадающие внутри* $\mathfrak{Z}$: $Z \to Z'$, то

$$\sum Z_{\lambda\mu} A_\lambda B_\mu \to \sum Z'_{\lambda\mu} A'_\lambda B'_\mu$$

определяет соответствующий автоморфизм в $\mathfrak{C}$, при котором $AB \to A'B'$. Применяя лемму (IX.1.A) к неприводимой матричной алгебре $\mathfrak{C} = (\mathfrak{z})_g$, мы получаем желаемое предложение (IX.1.B) *для того случая, когда* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *состоят лишь из одного блока.*

Чтобы перейти к случаю нескольких блоков, мы должны так обобщить лемму (IX.1.A), чтобы охватить прямую сумму $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_u$ из $v$ простых алгебр $\mathfrak{a}_u$, в конкретной форме

$$(1.6) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{A}_v, \quad A = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_v,$$

где каждая компонента $A_u$ независимо пробегает неприводимую матричную алгебру $\mathfrak{A}_u$. По теореме (III.5.C), каждое невырожденное представление алгебры $\mathfrak{a}$ есть сумма

$$\sum_{u=1}^{v} s_u \mathfrak{A}_u. \tag{1.7}$$

Представление (1.6), $a \longrightarrow A(a)$, где каждое $s_u = 1$, является точным. Пусть $a \longrightarrow a'$ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{a}$. Рассмотрим представление $a \longrightarrow A(a')$. Оно должно быть эквивалентно некоторому представлению (1.7); точность его нарушилась бы, если бы одно из $s_u$ было равно 0, а степень была бы слишком высока, если бы одно из $s_u$ было $> 1$. Следовательно, все $s_u = 1$, и новое представление эквивалентно старому, т. е. существует неособенная матрица $H$ такая, что

$$A(a') = H \cdot A(a) \cdot H^{-1}.$$

Лемма (IX.1.E). *Любой автоморфизм $A \longrightarrow A'$ прямой суммы $\mathfrak{A}$ неприводимых матричных алгебр,*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_v, \quad A = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_v,$$

*порождается некоторой постоянной неособенной матрицей $H$:*

$$A' = HAH^{-1}.$$

Обратимся наконец к произвольной вполне приводимой матричной алгебре $\mathfrak{A}$ и ее коммутаторной алгебре $\mathfrak{B}$, исследованным в теореме (III.5.B). Снова образуем линейную оболочку $\mathfrak{C}$ всех матриц

$$C = AB = BA \qquad (A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B})$$

и, пользуясь вряд ли требующими пояснения обозначениями, получаем:

$$\mathfrak{Z} = \sum g_u(\mathfrak{z}_u), \quad \mathfrak{C} = \sum (\mathfrak{z}_u)_{g_u}.$$

Применение нашей последней леммы к $\mathfrak{C}$ (а не к $\mathfrak{A}$) и к автоморфизму $AB \longrightarrow A'B'$ приводит к матрице $H$, существование которой требовалось теоремой (IX.1.B).

Что касается вопроса о *единственности*, то заметим, что $H$ можно заменить на $HZ_0$, где $Z_0$ — любая неособенная матрица из центра $\mathfrak{Z}$.

Комбинируя тождественный автоморфизм в $\mathfrak{B}$ с любым автоморфизмом в $\mathfrak{A}$, оставляющим элементы центра на месте, получаем в частности:

Теорема (IX.1.F). *Любой автоморфизм прямой суммы $\mathfrak{a}$ $v$ простых алгебр $\mathfrak{a}_a$, не затрагивающий элементов центра $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{a}$, является внутренним.*

## 2. Лемма об умножении алгебр

Пусть $\mathfrak{A} = \{A\}$, $\mathfrak{B} = \{B\}$ — две матричные алгебры, элементы $A$, $B$ которых суть, соответственно, преобразования в $n$-и $\nu$-мерных векторных пространствах $P_n$, $P_\nu$. Тогда каждое

$$A \times B \qquad (A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}) \tag{2.1}$$

действует в $n\nu$-мерном пространстве — произведении $P_n P_\nu$. Напоминаем читателю, что теперь изучается кронекеровское произведение $A \times B$, а не, как в предыдущем параграфе, обыкновенное произведение $AB$, и что $A$ и $B$ не предполагаются перестановочными. Линейная оболочка всех матриц (2.1) есть алгебра $[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]$, которую мы будем называть произведением алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Описанный процесс может быть определен и в терминах абстрактных алгебр $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Если алгебра $\mathfrak{a}$ ранга $m$ отнесена к базису $a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, а алгебра $\mathfrak{b}$ ранга $\mu$ — к базису $b_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \mu)$, с таблицами умножения

$$a_i a_k = \sum_l \alpha^l_{ik} a_l, \qquad b_\iota b_\varkappa = \sum_\lambda \beta^\lambda_{\iota\varkappa} b_\lambda,$$

то $\mathfrak{c} = [\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}]$ имеет базис $c_{i\iota}$ с таблицей умножения

$$c_{i\iota} c_{k\varkappa} = \sum_{l,\lambda} \alpha^l_{ik} \beta^\lambda_{\iota\varkappa} c_{l\lambda}.$$

Переход к другому базису в $\mathfrak{a}$ или в $\mathfrak{b}$ вызывает лишь изменение базиса в $[\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}]$.

Заметим, что

$$\mathfrak{A}_v = [\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}_v];$$

поэтому

$$[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_v] = [\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]_v.$$

Пусть $K$ — поле над $k$. Любое $k$-линейное множество $\mathfrak{A}$ матриц $A$ над $k$ может быть распространено на $K$ путем образования его линейной оболочки $\mathfrak{A}_K$ над $K$. Если $A_1, \ldots, A_m$ — базис для $\mathfrak{A}$, то

$$A = \xi_1 A_1 + \ldots + \xi_m A_m$$

будет пробегать $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}_K$, когда коэффициенты $\xi_l$ будут независимо изменяться в $k$ или, соответственно, в $K$. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра над $k$, то $\mathfrak{A}_K$ подобным же образом, — алгебра над $K$. Также и этот процесс может быть описан в абстрактных терминах: если $a_1, \ldots, a_m$ — базис $k$-линейного множества $\mathfrak{a}$ ранга $m$, то $\mathfrak{a}_K$ состоит из всех формальных сумм $\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i$ с произвольными коэффициентами $\xi_i$ из $K$; изменение базиса в $\mathfrak{a}$ сводится к частному типу изменения базиса в $\mathfrak{a}_K$, отличающемуся тем, что коэффициенты преобразования лежат в подполе $k$.

Если $\mathfrak{B}$ — коммутаторная алгебра над $k$ алгебры $\mathfrak{A}$ над $k$, то $\mathfrak{B}_K$ будет коммутаторной алгеброй алгебры $\mathfrak{A}_K$ над $K$. Действительно, если $A_1, \ldots, A_m$ — базис алгебры $\mathfrak{A}$, то матрица $B$ над $K$ принадлежит $\mathfrak{B}_K$, если она удовлетворяет $m$ уравнениям

$$BA_i = A_iB.$$

Это — однородные линейные уравнения для $B$ с коэффициентами из $k$. Следовательно, решения $B$ обладают базисом $B_1, \ldots, B_\mu$, состоящим из матриц над $k$. Выражение

$$\eta_1 B_1 + \ldots + \eta_\mu B_\mu$$

доставляет все коммутаторы над $k$ или $K$, когда $\eta_i$ независимо пробегают все числа из $k$ или, соответственно, из $K$. Далее, центром алгебры $\mathfrak{A}_K$, т. е. пересечением ее с $\mathfrak{B}_K$, служит $\mathfrak{Z}_K$ — распространение центра $\mathfrak{Z}$ алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ на $K$. Действительно, если $A_1, \ldots, A_m$ — базис алгебры $\mathfrak{A}$, то элементы

$$Z = \xi_1 A_1 + \ldots + \xi_m A_m$$

из $\mathfrak{Z}_K$ получаются как решения уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k (A_i A_k - A_k A_i) = 0$$

в числах $\xi_k$ из $K$. Так как коэффициенты уравнений лежат в $k$, то эти решения обладают $k$-базисом. В частности, если алгебра $\mathfrak{A}$ — нормальная, то это же верно и для $\mathfrak{A}_K$.

Пусть теперь $\mathfrak{d}$ — абстрактная нормальная алгебра с делением ранга $\delta$ и $\mathfrak{B} = \{B\}$ — неприводимая алгебра матриц порядка $d$. Операции

$$(a) \times B \qquad \{a \in \mathfrak{d},\ B \in \mathfrak{B}\}$$

действуют в $\delta d$-мерном векторном пространстве $\mathfrak{d}P_d$. Мы утверждаем, что $\mathfrak{d}P_d$ расщепляется относительно этого множества $(\mathfrak{d}) \times \mathfrak{B}$ операторов на некоторое число $u$ неприводимых инвариантных подпространств, в каждом из которых $(a) \times B$ индуцирует одно и то же преобразование; т. е.:

Лемма (IX.2.A).

$$(\mathfrak{d}) \times \mathfrak{B} \sim u \cdot \mathfrak{H}, \tag{2.2}$$

*где $\mathfrak{H}$ — некоторое неприводимое множество матриц.*

Векторы $\mathfrak{x}$ из $\mathfrak{d}P_d$ выражаются через базис $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_d$ пространства $P_d$ в виде

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + x_d\mathfrak{e}_d \qquad (x_i \in \mathfrak{d}). \tag{2.3}$$

Рассматривая $\mathfrak{d}$ как „квази-поле“ свободного изменения коэффициентов $x_i$, определяем для любого $a$ из $\mathfrak{d}$:

$$a\mathfrak{x} = (ax_1)\mathfrak{e}_1 + \ldots + (ax_d)\mathfrak{e}_d, \qquad \mathfrak{x}a = (x_1a)\mathfrak{e}_1 + \ldots + (x_da)\mathfrak{e}_d.$$

Инвариантное подпространство $\Sigma$ пространства $\mathfrak{d}P_d$ есть, конечно, подмножество векторов $\mathfrak{x}$, (2.3), замкнутое относительно сложения и умножения спереди ($\mathfrak{x} \longrightarrow a\mathfrak{x}$); действительно, в наших прежних обозначениях последняя операция есть $(a) \times E_d$. Поэтому $\Sigma$ обладает $\mathfrak{d}$-базисом $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$, через который каждый вектор $\mathfrak{x}$ из $\Sigma$ единственным образом выражается в виде

$$\mathfrak{x} = y_1\mathfrak{l}_1 + \ldots + y_n\mathfrak{l}_n \qquad (y_i \in \mathfrak{d}),$$

и $\Sigma$ имеет размерность $\delta n$, кратную $\delta$. Будем предполагать $\Sigma$ неприводимым.

Для любой заданной величины $b$ из $\mathfrak{d}$ пространство $\Sigma b$, состоящее из всех векторов $\mathfrak{x}b$ $(\mathfrak{x} \in \Sigma)$, как и $\Sigma$, инвариантно относительно $(a) \times B$, и $(a) \times B$ индуцирует в нем то же преобразование, что и в $\Sigma$. Применив лемму (III.2.B) к последовательности неприводимых инвариантных подпространств

$$\Sigma_1 = \Sigma c_1 = \Sigma, \quad \Sigma_2 = \Sigma c_2, \ldots, \quad \Sigma_\delta = \Sigma c_\delta,$$

где $c_1 = 1, \ldots, c_\delta$ — базис алгебры $\mathfrak{d}$, мы выделим из этой последовательности некоторую подпоследовательность — например, при надлежащей нумерации, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_u$, — такую, что 1) $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_u$ будут линейно независимы, и 2) каждое $\Sigma_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \delta)$ будет содержаться в сумме

$$\Sigma_1 + \ldots + \Sigma_u = (\Sigma).$$

Последнее обстоятельство показывает, что $(\Sigma)$ инвариантно также относительно умножений сзади: $(\Sigma)c_\iota$ содержится в $(\Sigma)$ для всех $\iota = 1, \ldots, \delta$. Следовательно, $(\Sigma)$ инвариантно относительно всех преобразований вида

$$(a)(b)' \times B,$$

где $\dot{a}$ и $b$ пробегают базис алгебры $\mathfrak{b}$, а $B \in \mathfrak{B}$, и тем самым, согласно лемме (IX.1.C), — относительно $\mathfrak{M}_\delta \times \mathfrak{B}$. Тогда лемма (III.2.A) показывает, что ($\Sigma$) есть все пространство $\mathfrak{b}\mathrm{P}_d$, и это замечание завершает наше доказательство, доставляя в то же время равенство

$$d = nu:$$

*и есть делитель числа d.*

## 3. Произведения простых алгебр

С доказательством леммы (IX.2.A) выполнена серьезная доля работы; остается оценить и истолковать значение полученного результата для произведения простых алгебр (§ 3) и расширения основного поля (§ 4).

Из (2.2) вытекают соотношения

$$[(\mathfrak{b}) \times \mathfrak{B}] \sim u[\mathfrak{H}], \quad [(\mathfrak{b})_v \times \mathfrak{B})] \sim u[\mathfrak{H}]_v.$$

Согласно лемме (III.2.A), алгебра $[\mathfrak{H}]_v$ вследствие неприводимости алгебры $[\mathfrak{H}]$ неприводима; а в силу теоремы Веддербёрна мы можем представить наш результат в форме соотношения эквивалентности

$$(3.1) \qquad [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}] \sim u \cdot \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L} \text{ неприводимо,}$$

имеющего место для любых двух неприводимых матричных алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, первая из которых нормальна. Наш результат содержит следующее абстрактное предложение:

Теорема (IX.3.A). *Произведение двух простых алгебр, одна из которых нормальна, есть снова простая алгебра.*

Отсюда мы могли бы, с помощью теоремы (III.3.E), вывести наше конкретное предложение, что $[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]$ есть $u$-кратное неприводимой матричной алгебры $\mathfrak{L}$. Однако данное нами выше доказательство было непосредственно направлено к этой конкретной цели и, кроме того, дало еще, что $u$ есть делитель порядка $d$ матриц алгебры $\mathfrak{B}$.

Теорема Веддербёрна делает переход от алгебр с делением $\mathfrak{e}$ к простым алгебрам $\mathfrak{B}$ столь легким, что, пожалуй, удобнее специализировать наш результат (2.2) для случая $\mathfrak{B} = (\mathfrak{e})$, где $\mathfrak{e}$ — алгебра с делением ранга $d$, чем обобщать его до (3.1). Напишем поэтому (специальное $\times$ специальное)-равенство

$$(3.2) \qquad (\mathfrak{b}) \times (\mathfrak{e}) \sim u \cdot \mathfrak{H}.$$

Это приводит обратно к (общему $\times$ общее)-результату (3.1) в форме

(3.3) $$[(\mathfrak{d})_v \times (\mathfrak{e})_w] \sim u \cdot [\mathfrak{H}]_{vw}.$$

Переход от $(\mathfrak{d})$ и $(\mathfrak{e})$ к $\mathfrak{A} = (\mathfrak{d})_v$ и $\mathfrak{B} = (\mathfrak{e})_w$ оставляет кратность $u$ неизменной, заменяя $[\mathfrak{H}]$ на точно так же неприводимое $[\mathfrak{H}]_{vw}$.

Относительно (специального $\times$ специальное)-случая (3.2) я чувствую себя обязанным сделать два дополнительных замечания.

Первое замечание. Инвариантное подпространство $\Sigma$ произведения $\mathfrak{de}$ обладает неким базисом $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ относительно квази-поля коэффициентов из $\mathfrak{d}$. Однако мы можем поменять ролями $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{e}$ и рассматривать $\mathfrak{d}$ как векторное пространство, а $\mathfrak{e}$ — как квази-поле множителей или коэффициентов. $\Sigma$ будет иметь тогда некий $\mathfrak{e}$-базис $\mathfrak{f}_1, \ .\,., \mathfrak{f}_v$, через который оно описывается выражением

$$z_1\mathfrak{f}_1 + \ . + z_\nu\mathfrak{f}_\nu,$$

в котором коэффициенты $z_\iota$ независимо пробегают $\mathfrak{e}$. $\Sigma$ имеет размерность

$$n\delta = \nu d, \quad \text{откуда} \quad d : \delta = n : \nu.$$

Так как $d = nu$, то получаем еще соотношение $\delta = \nu u$ и убеждаемся тем самым, что *$u$ является общим делителем чисел $d$ и $\delta$*. Та же связь имеется и в (общем $\times$ общее)-случае. Действительно, при переходе от $(\mathfrak{d})$ к $\mathfrak{A} = (\mathfrak{d})_v$ и от $(\mathfrak{e})$ к $\mathfrak{B} = (\mathfrak{e})_w$, $\delta$ и $d$ превращаются, соответственно, в $\delta v$ и $dw$, тогда как $u$ остается неизменным, соотношение (3.3). Имея в своем распоряжении эту дополнительную информацию, мы сформулируем конкретный дубликат теоремы (IX.3.A) следующим образом:

Теорема (IX.3.B). *Произведение двух неприводимых матричных алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, одна из которых нормальна, разлагается на некоторое число $u$ одинаковых неприводимых компонент $\mathfrak{L}$,*

$$[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}] \sim u \cdot \mathfrak{L}.$$

*Кратность $u$ является общим делителем порядков матриц обоих сомножителей.*

Одинаковые части, на которые, в числе $u$, разлагается общая матрица $A \times B$ алгебры $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, будут иногда обозначаться символом $\amalg(A, B)$. В частном случае $\mathfrak{A} = (\mathfrak{d})$ мы вместо $\amalg((a), B)$ пишем просто $\amalg(a, B)$, и аналогично поступаем, когда $\mathfrak{B}$ есть $(\mathfrak{e})$.

Второе замечание. Применяя в (специальном × специальное)-соотношении (3.2), или в

$$[(\mathfrak{d})\times(\mathfrak{e})]\sim u\cdot[\mathfrak{H}]$$

теорему Веддербёрна к неприводимому $[\mathfrak{H}]$, заключаем из нее, что

$$[\mathfrak{H}]=(\mathfrak{h})_v,$$

где абстрактная алгебра с делением $\mathfrak{h}$, называемая брауэровским произведением [3], однозначно определяется сомножителями $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{e}$. Сравнение степеней и рангов в получающемся соотношении эквивалентности

$$[(\mathfrak{d})\times(\mathfrak{e})]\sim u\cdot(\mathfrak{h})_v,$$

приводит к соотношениям

$$\delta d=uvh,\quad \delta d=v^2h,$$

где $h$ — степень представления $(\mathfrak{h})$ = ранг алгебры — $\mathfrak{h}$. Поэтому $v=u$ и

$$d=nu,\quad \delta=\nu u,\quad h=n\nu.$$

Теорема (IX.3.C). *Произведение регулярных представлений* $(\mathfrak{d})$ и $(\mathfrak{e})$ *двух алгебр с делением* $\mathfrak{d}$ *и* $\mathfrak{e}$ *рангов* $\delta$ *и* $d$, *где* $\mathfrak{d}$ *нормальна, разлагается по формуле*

$$[(\mathfrak{d})\times(\mathfrak{e})]\sim u\cdot(\mathfrak{h})_u.$$

*Если положить*

$$d=nu,\quad \delta=\nu u\qquad (n \text{ и } \nu \text{ — целые}),$$

*то ранг алгебры с делением* $\mathfrak{h}$ *равен* $n\nu$.

## 4. Расширение основного поля

Мы еще полностью не оценили идею, заключенную в основном нашем доказательстве возможности отнесения инвариантного подпространства $\Sigma$ произведения $\mathfrak{d}P_d$ к $\mathfrak{d}$-базису $\mathfrak{l}_1,\ldots,\mathfrak{l}_n$. Рассмотрим теперь ее следствия для совсем другого случая: $\mathfrak{A}\times(\mathfrak{e})$, где $\mathfrak{A}$ — нормальная неприводимая матричная алгебра, а $\mathfrak{e}$ — произвольная алгебра с делением. Пусть $\Sigma$ — инвариантное подпространство векторного пространства $P\mathfrak{e}$, подвергаемого действию операторов $A\times(a)$ из $\mathfrak{A}\times(\mathfrak{e})$ ($A$ — операторы в $\delta$-мерном пространстве $P$, $\mathfrak{e}$ — ранга $d$). $\Sigma$ обладает $\mathfrak{e}$-базисом $\mathfrak{l}_1,\ldots,\mathfrak{l}_\nu$, так что каждый вектор $\mathfrak{x}$ из $\Sigma$ однозначно выражается в виде

$$\mathfrak{x}=y_1\mathfrak{l}_1+\ldots+y_\nu\mathfrak{l}_\nu\qquad (y_\iota\in\mathfrak{e}).\tag{4.1}$$

Будем теперь рассматривать $P\mathfrak{e} = P_{\mathfrak{e}}$ как векторное пространство, получаемое из $P$ при расширении его поля мультипликаторов $k$ до квази-поля $\mathfrak{e}$. Элементы пространства $P_{\mathfrak{e}}$ суть ряды $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_\delta)$, образованные $\delta$ величинами из $\mathfrak{e}$. Сложение определяется обычным образом, умножение на величину $a$ из $\mathfrak{e}$ — по формуле

$$a(x_1, \ldots, x_\delta) = (ax_1, \ldots, ax_\delta).$$

Линейное подпространство $\Sigma_{\mathfrak{e}}$ пространства $P_{\mathfrak{e}}$ есть подмножество последнего, замкнутое относительно сложения и умножения на любое $a$ из $\mathfrak{e}$. Формула (4.1) определяет подпространство $a_{\iota\varkappa}$ $\Sigma_{\mathfrak{e}}$, имеющее базис $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\nu$.

Каждый оператор $A$ есть линейная подстановка с коэффициентами $a_{\iota\varkappa}$, являющимися обыкновенными числами из $k$:

$$x'_\iota = \sum_\varkappa x_\varkappa a_{\iota\varkappa} \qquad (\iota, \varkappa = 1, \ldots, \delta),$$

и потому перестановочен со всеми умножениями $\mathfrak{x} \to a\mathfrak{x}$. Если $\Sigma_{\mathfrak{e}}$ инвариантно относительно преобразований $A$ из $\mathfrak{A}$, то каждое $A$: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}'$ переводит базисные векторы $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\nu$ в их линейные комбинации:

$$\mathfrak{l}'_\iota = \sum_\varkappa a_{\varkappa\iota} \mathfrak{l}_\varkappa \qquad (\iota, \varkappa = 1, \ldots., \nu).$$

Будучи перестановочным с умножениями, $A$ переводит тогда (4.1) в

$$\mathfrak{x}' = y_1 \mathfrak{l}'_1 + \ldots + y_\nu \mathfrak{l}'_\nu = y'_1 \mathfrak{l}_1 + \ldots + y'_\nu \mathfrak{l}_\nu,$$

где

$$y'_\iota = \sum_\varkappa y_\varkappa a_{\iota\varkappa} \qquad (\iota, \varkappa = 1, \ldots, \nu).$$

Соответствие $A \to \| a_{\iota\varkappa} \|$ является *представлением* $\mathfrak{A}$ над $\mathfrak{e}$ (линейными преобразованиями, в которых коэффициенты стоят *за* переменными).

Теорема (IX.4.A). *При расширении поля $k$ до квази-поля $\mathfrak{e}$ над $k$ заданная нормальная матричная алгебра $\mathfrak{A}$, неприводимая над $k$, разбивается на $u$ одинаковых неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{A}$ над $\mathfrak{e}$.*

Этот способ обрисовки положения связан с нашей прежней точкой зрения следующим образом. В принятой здесь системе координат, $\Pi(A, 1)$ получается из нашего представления $A \to \| a_{\iota\varkappa} \|$ путем замены каждого $a_{\iota\varkappa}$ матрицей $(a_{\iota\varkappa})'$ (умножение сзади), тогда как $\Pi(E_\delta, a)$ есть просто $E_\nu \times (a)$.

Особую важность представляет случай, когда $\mathfrak{e}$ есть коммутативное поле $K$. В этом случае мы получаем из нашей теоремы, что после расширения основного поля $k$ до поля $K$, конечного над $k$, нормальная неприводимая матричная алгебра $\mathfrak{A}$ над $k$ расщепляется на $u$ одинаковых неприводимых матричных алгебр над $K$:

$$\mathfrak{A}_K \sim u\cdot\mathfrak{L}.$$

Матричная алгебра $\mathfrak{L}$ над $K$ не только неприводима над $K$, но, в то же время, и нормальна. Действительно, как мы заметили в § 2, при расширении поля нормальность сохраняется. Рассмотрим снова частный случай $\mathfrak{A}=(\mathfrak{d})$. Тогда мы должны иметь соотношение эквивалентности вида *)

$$(\mathfrak{d}_K) \sim u\cdot(\mathfrak{D})_v,$$

где $\mathfrak{D}$ — нормальная алгебра с делением над $K$. Обозначая через $D$ степень = ранг представления $(\mathfrak{D})$ и сравнивая степени и ранги, приходим к соотношениям

$$\delta = uvD, \quad \delta = v^2D,$$

откуда

$$u=v \quad \text{и} \quad \delta = u^2D.$$

Теорема (IX.4.B). *При расширении поля $k$ до поля $K$, конечного над $k$, нормальная алгебра с делением $\mathfrak{d}$ над $k$ разбивается по формуле*

$$(\mathfrak{d}_K) \sim u\cdot(\mathfrak{D})_u,$$

*где $\mathfrak{D}$ — некоторая нормальная алгебра с делением над $K$.*

Всегда ли возможно путем надлежащего алгебраического присоединения добиться приведения $(u>1)$, коль скоро $\mathfrak{d}$ не есть еще основное поле $k$? Да, всегда. Выберем в $\mathfrak{d}$ любой элемент $b_0$, не являющийся численным кратным единицы $e$, и присоединим к $k$ корень $\theta$ характеристического уравнения $\varphi(z)=0$ подстановки

$$(b_0)': \ x \longrightarrow xb_0.$$

---

*) Загнанный противоречивыми требованиями втупик, я нарушил здесь условие, запрещающее обозначение абстрактных алгебр прописными готическими буквами. Да простит мне бог, наблюдающий за правильным употреблением математических символов—в рукописи, в печати и на доске, — этот и многие другие мои грехи.

Тогда преобразование $(b_0)' - \theta E$ будет вырожденным, $\neq 0$ и перестановочным со всеми матрицами $(a)$ из $(\mathfrak{d})$. Поэтому, в силу леммы Шура, $(\mathfrak{d})$ должно приводиться над $k(\theta)$.

Повторно применяя этот процесс, приходим к такому алгебраическому расширению $K$ поля $k$, что

$$(\mathfrak{d}_K) \sim u \cdot \mathfrak{M}_u.$$

Теорема (IX.4.C). *Существуют конечные алгебраические поля $K$ над $k$, так называемые поля расщепленияе*[4], ***над которыми заданная нормальная алгебра с делением $\mathfrak{d}$ над $k$*** *приводится по формуле*

$$(\mathfrak{d}_K) \sim u \cdot \mathfrak{M}_u.$$

*Поэтому ранг любой нормальной алгебры с делением является квадратом $u^2$.*

Для любой нормальной неприводимой матричной алгебры $\mathfrak{A} \sim (\mathfrak{d})_t$ над $k$ получаем в поле расщепления алгебры $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{A}_K \sim u \cdot \mathfrak{M}_v,$$

где $v = ut$ — кратное $u$. Ранг простой алгебры $\mathfrak{a}$ есть квадрат $v^2$, степень ее представления $\mathfrak{A}$ есть $uv$.

В исследованиях, приведенных в §§ 3 и 4, существенную роль играло предположение, что один из наших сомножителей нормален. В коммутативных полях происходят совершенно незакономерные вещи: произведение двух полей разбивается на *неэквивалентные* части, и даже для обеспечения самой его полной приводимости требуются предположения относительно сепарабельности [5]. Аналогичное положение имеет место и для автоморфизмов: неопределенность, содержащаяся в производящей матрице $H$ теоремы (IX.1.B), вызывается центральными полями $\mathfrak{z}_u$. Вся суперструктура алгебр над коммутативными полями обладает относительно простой природой по сравнению с самими полями.

# БИБЛИОГРАФИЯ

(За номером каждого примечания следует в скобках номер страницы, к которой оно относится.)

## ГЛАВА I

[1] (18) См. напр., H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5-е изд., Berlin, 1923, стр. 15.

[2] (27) См. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7-е изд., Leipzig, 1930, гл. 7.

[3] (28) Упомянем в частности W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2-е изд., Cambridge, 1911; G. A. Miller, H. F. Blichfeldt, L. E. Dickson, Theory and Application of Finite Groups, New York, 1916; A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3-е изд., Berlin, 1937; H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I, Berlin, 1937; главы, посвященные теории групп, во втором издании „Современной алгебры“ ван дер Вардена и гл. III, §§ 1—3 в Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2-е изд., Leipzig, 1931.

[4] (28) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen, 1872; также Math. Ann. 43 (1893), стр. 63, и Gesammelte mathematische Abhandlungen I, Berlin, 1921, стр. 460.

[5] (30) G. W. Leibnitz, Initia rerum Mathematicarum metaphysica, в Leibnitzens Mathematische Schriften, изд. C. J. Gerhardt, VII, Berlin, 1848—1863, стр. 17; Zur Analysis der Lage, там же, V, стр. 178. Как отчетливо представлял себе Лейбниц проблему относительности, показывает его переписка с Кларком (Clarke), особенно его третье письмо, №№ 4 и 5, и его пятое письмо, № 47 (легко доступно в G. W. Leibniz, Philosophische Werke, изд. A. Buchenau и E. Cassirer, I, 2-е изд., Meiner's Philosophische Bibliothek, Leipzig, 1924).

[6] (33) См. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5-е изд., Berlin, 1923, стр. 16.

[7] (34) По поводу этого понятия и оснований теории инвариантов см. B. L. v. d. Waerden, Math. Ann. 113 (1936), стр. 14.

[8] (39) I. Kant, Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können, Kant's Werke, изд. Preuss. Akad. d. Wissensch., IV, Berlin, 1903, стр. 286.

## ГЛАВА II

[1] (45) Journ. reine angew. Math. 30 (1846), стр. 1. Coll. Math. Papers I, Cambridge, 1889, стр. 117.

[2] (45) Phil. Transact., тт. 144, 145, 146, 148, 149, 151, 157, 159, 169 (1854—1878). Coll. Math. Papers, т. II, n°n° 139, 141, 144, 155, 156, 158; т. IV, n° 269; т. VI, n° 405; т. VII, n° 462; т. X, n° 693; ссылка в тексте относится к первым шести номерам.

[3] (46) Math. Ann. 36 (1890), стр. 473; 42 (1892), стр. 313.

[4] (47) E. Galois, Oeuvres, Paris, 1897, особенно его письмо к Огюсту Шевалье, написанное накануне смерти.

[5] (47) В качестве современной книги по этому предмету, обращенной к математически образованному читателю, отметим P. Niggli, Geometrische Kristallographie des Discontinuums, Leipzig, 1919. Книга А. Шпейзера, цитированная в гл. I[3], содержит две интересные главы о кристаллографических классах и симметриях орнаментов.

[6] (48) Ли сам синтезировал результаты своих работ в большой трехтомной работе: S. Lie and F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, 1893.

[7] (48) Все работы Фробениуса были опубликованы в Sitzungsber. Preuss. Akad. Полный список их названий можно найти в книге Шпейзера на стр. 143.

[8] (48) Thèse, Paris 1894; эта работа связана с более ранней, но дефектной работой Киллинга, Math. Ann. 31, 33, 34, 36 (1888—1890). E. Cartan, Bull. Soc. Math. de France 41 (1913), стр. 53.

[9] (48) W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin, 1853. B. Peirce, Linear Associative Algebra, Washington, 1870, и Am. Journ. of Math. 4 (1881), стр. 97. Th. Molien, Math. Ann. 41 (1893), стр. 83; 42 (1893), стр. 308.

[10] (48) J. H. M. Wedderburn, On Hypercomplex Numbers, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 6 (1908), стр. 77.

[11] (48) I. Schur, Trans. Amer. Math. Soc. (2) 15 (1909), стр. 159.

[12] (48) По поводу истории математики в девятнадцатом столетии см. Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии, М.-Л., ОНТИ, 1937.

[13] (61) A. Capelli; Math. Ann. 29 (1887), стр. 331.

[14] (72) H. Weyl, Math. Zeitschr. 20 (1924), стр. 139.

[15] (77) R. Weitzenböck, Komplex-Symbolik, Leipzig, 1908; Invariantentheorie, Groningen, 1923, гл. III.

[16] (79) Первую основную теорему для ортогональных векторных инвариантов впервые доказал E. Study, Ber. Sächs. Akad. Wissensch. 1897, стр. 443. В нижеследующем вопрос излагается по Вейлю, Math. Zeitschr. 20 (1924), стр. 136.

[17] (83) Группу эвклидовых движений, т. е. $n$-мерную ортогональную группу, расширенную окаймлением ширины $\nu$, и ее векторные инварианты рассматривал R. Weitzenböck. См. его Invariantentheorie, Groningen, 1923, гл. XII; см. также Wanner, Диссертация, Zürich, 1926,

и мои мимеографированные Notes on Elementary Theory of Invariants, Princeton, 1935—1936.

[18] (84) Cayley, Journ. reine angew. Math. 32 (1846), = Coll. Math. Papers I, n° 52, стр. 332. По поводу алгебраической структуры ортогональиой группы и других классических групп над полем характеристики 0 или простой характеристики см. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Ergebn. d. Math. 4:2, Berlin, 1935, и указанную там литературу. Систематическое исследование групп mod $p$ предпринял L. E. Dickson, см. его книгу Linear Groups, Leipzig, 1901.

[19] (96) См. E. Witt, Journ. reine angew. Math. 176 (1937), стр. 31, Satz 2.

[20] (102) E. Pascal, Mem. Accad. dei Lincei (4) 5 (1888). B. L. v. d. Waerden, Math. Ann. 95 (1926), стр. 706.

## ГЛАВА III

[1] (116) I. Schur, в его „Neue Begründung der Theorie der Gruppen-, charaktére“, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1905, стр. 406.

[2] (123) Принятое здесь изложение следует работе автора в Annals of Math. 37 (1936), раздел 1, стр. 710—718. Абстрактный подход см. в Deuring, Algebren, Ergebn. Math. 4 : 1, Berlin, 1935, особенно главы I—IV. В основе всего новейшего развития теории ассоциативных алгебр лежит работа Веддербёрна, цитированная в гл. III[10]. Вехами этого развития являются книги L. E. Dickson'a: Linear Algebras, Cambridge Tracts 16, 1914; Algebras and Their Arithmetics, Chicago, 1923, и ее пересмотренное немецкое издание „Algebren und ihre Zahlentheorie“, Zürich, 1927.

[3] (130) Burnside, Proc. London Math. Soc. (2) 3 (1905), стр. 430. G. Frobenius и I. Schur, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1906, стр. 209

[4] (139) См. пятую главу моей книги Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2-е изд., Leipzig, 1931.

[5] (142) Отсюда следует полная приводимость любого представления группового кольца. Этот фундаментальный факт впервые доказал H. Maschke, Math. Ann. 52 (1899), стр. 363.

[6] (149) См. H. Weyl, Duke Math. Journ. 3 (1937), стр. 200.

[7] (155) Наш метод (II) в его применении к алгебре всех бисимметричных преобразований в тензорном пространстве тесно связан с самой первой трактовкой представлений полной линейной группы, данной И. Шуром в его диссертации „Ueber eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen“, Berlin, 1901; метод же (I) применен к этой проблеме в работе I. Schur, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1927, стр. 58. См. van der Waerden, Mann. Ann. 104 (1931), стр. 92 и 800.

[8] (157) $a \to a^J$ называется инволютивным антиавтоморфизмом, действующим иа элементы $a$ некоторой алгебры, если

$(a+b)^J = a^J + b^J$, $(\lambda a)^J = \lambda a^J$; $(ab)^J = b^J a^J$; $(a^J)^J = a$ ($\lambda$ — любое число).

Наша операция $a \to \hat{a}$ есть операция этого типа. Алгебры с инволютивным антиавтоморфизмом детально исследовал A. A. Albert, см., в частности, его работу в Ann. of Math. 36 (1935), стр. 886. Они имеют существенное значение для теории так называемых римановых матриц, см. Albert, l. c., и Weyl, Ann. of Math. 37 (1936), стр. 709, а также для алгебраического построения алгебр Ли, см. гл. VIII[9].

[9] (160) Полулинейные преобразования впервые ввел C. Segre, Atti Torino 25 (1889), стр. 276. В поле K† комплексных чисел имеется автоморфизм, состоящий в переходе к комплексно-сопряженному числу („антилинейные преобразования“). Теорию представлений конечной группы полулинейными преобразованиями дали T. Nakayama и K. Shoda, Jap. Journ. of Math. 12 (1936), стр. 109. По поводу соответствующего обобщения нашей теории см. Weyl, l. c. [6]; относительно полулинейных или антилинейных преобразований вообще см. J. Haantjes, Math. Ann. 112. (1925), стр. 98; 114 (1927), стр. 293; N. Jacobson, Ann. of Math. 38 (1937), стр. 485; Asano and Nakayama, Math. Ann 115 (1937), стр. 87; Nakayama, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 19 (1937).

## ГЛАВА IV

[1] (162) loc. cit. гл. III[1].

[2] (168) A. Joung, Proc. Lond. Math. Soc. (1) 33 (1900), стр. 97; (1) 34 (1902), стр. 361; G. Frobenius, Sitzungsber. Preuss. Akad, 1903, стр. 328. Неймановское упрощенное изложение дано в книге ван дер Варден, Современная алгебра, II, 2-е изд., § 129.

[3] (177) Особенно изящный способ выполнения такого построения указал W. Specht, Math. Zeitschr. 39 (1935), стр. 696; см. особенно разделы IV и V его работы. Этот способ основан на более ранних работах И. Шура, особенно Sitzungsber. Preuss. Akad. 1908, стр. 64. Та же цель достигнута в серии публикаций А. Юнга в Proc. Lond. Math. Soc. „On the Quantitative Substitutional Analysis“, начинающейся с цитированной в [2] и продолжающейся следующими: (2) 28 (1928), стр. 285; (2) 31 (1930), стр. 253; (2) 34 (1932), стр. 196; (2) 36 (1933), стр. 304. См. седьмой раздел книги J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1924. По поводу знакопеременной группы см. G. Frobenius, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1901, стр. 303; относительно октаэдральной группы, которая сыграет некоторую роль в главе VII, см. A. Joung, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 31 (1930), стр. 273; W. Specht, Math. Zeitschr. 42 (1937), стр. 120; по поводу обобщений в других направлениях см. W. Specht, Schriften Math. Sem. Berlin 1 (1932); Math. Zeitschr. 37 (1933), стр. 321.

[4] (181) Связь между симметрической и полной линейной группами впервые была открыта и применена к анализу представлений последней И. Шуром в его Диссертации, Берлин, 1901.

[5] (187) По поводу более ранней истории теоретико-инвариантных разложений см. R. Weitzenböck, Invariantentheorie, Groningen, 1923, стр. 137.

## ГЛАВА V

[1] (189) Этот метод предложил R. Brauer, On Algebras which are connected with the Semisimple Continuous Groups, Ann. of Math. 38 (1937), стр. 857.

[2] (194) R. Brauer, l. c.[1], стр. 870.

[3] (194) Math. Zeitschr. 35 (1932), стр. 300.

[4] (205) См. § 5 статьи R. Brauer'a, l. c.[1].

[5] (217) Пользуясь инфинитезимальным методом (глава VIII, раздел B), Э. Картан в своей работе в Bull. Soc. Math. de France 41 (1913), стр. 53, построил все неприводимые представления любой простой непрерывной группы и, следовательно, в частности, ортогональной группы $O(n)$. Некоторых дальнейших рассмотрений, которые выполнил H. Weyl, Nachr. Gött. Ges. Wissensch. 1927, стр. 227, потребовало установление того, что полем действия этих представлений служат наши подпространства $P_0(f_1\ldots f_\nu)$, а именно, доказательство следующего утверждения, идущего в том же направлении, что и теоремы (V.2.B) и (V.3.A), но существенно более слабого: совокупность всех полиномов $\Phi(x^1,\ldots,x^\nu)$, зависящих от произвольных векторов $x^1,\ldots,x^\nu$ и обращающихся в нуль при выполнении $\nu^2$ соотношений

$$(*)\qquad (x^\alpha x^\beta)=0 \qquad (\alpha,\beta=1,\ldots,\nu),$$

образует идеал, а левые части соотношений (*) составляют его базис.

[6] (219) A. H. Clifford, Ann. of Math. 38 (1937), стр. 533.

[7] (226) Аналогично этому переходу от полной к собственно ортогональной группе с помощью теоремы Клиффорда, можно было бы выполнить и снижение от симметрической к знакопеременной группе. Ср. G. Frobenius, Sitzungsber. Preuss. Acad. 1901, стр. 303.

## ГЛАВА VI

[1] (230) Weyl, Math. Zeitschr. 20 (1924), стр. 140. Группа $Sp(n)$ с окаймлением произвольной ширины $\mu$ и инвариантами, зависящими от ковариантных и контравариантных векторных аргументов, рассматривается в диссертации R. Wanner'a, Zürich, 1926.

[2] (239) Ср. R. Brauer, Ann. of Math. 38 (1937), стр. 855, и H. Weyl, Math. Zeitschr. 35 (1932), стр. 300.

## ГЛАВА VII

[1] (254) Относительно того, что из неравенства (2.10) следует $|A|\neq 0$, см. H. Minkowski, Nachr. Gött. Ges. Wissensch. 1900, стр. 90.

[2] (259) Этот процесс впервые ввел A. Hurwitz, Nachr. Gött. Ges. Wissensch. 1897, стр. 71, в целях доказательства первой основной теоремы об инвариантах (глава VIII B, в частности, теорема VIII.14.A), применив его к вещественной ортогональной группе.

[3] (260) И. Шур впервые применил процесс интегрирования к представлениям компактных групп, и в частности, вещественной ортогональной группы, в трех важных работах, помещенных в Sitzungsber. Preuss. Akad. 1924, стр. 189, 297, 346, под заглавием „Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie“.

[4] (260) Math. Ann. 97 (1927), стр. 737.

[5] (265) По поводу всего этого предмета и его литературы см. Г. Бор, Почти периодические функции, Гостехиздат, 1933.

[6] (265) Ann. of Math. 34 (1933), стр. 147.

[7] (265) Transact. Am. Math. Soc. 36 (1934), стр. 445. Ср. также W. Maak, Abh. Math. Sem. Hamburg 11 (1935—1936), стр. 240.

[8] (266) Ann. of Math. 37 (1936), стр. 57.

[9] (266) E. Cartan, Rend. Circ. Mat. Palermo 53 (1929), стр. 217. H. Weyl, Ann. of Math. 35 (1934), стр. 486.

[10] (266) L. Pontrjagin, Ann. of Math. 35 (1934), стр. 361.

[11] (271) В трех работах под наименованием „Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen“, Math. Zeitschr. 23 (1925), стр. 271; 24 (1926), стр. 338 и 377 (Appendix, стр. 789), автор соединил инфинитезимальный подход Ли-Картана с интегральным подходом Гурвица-Шура. Первая работа содержит определение плотности классов и определение характеров унитарной группы интегральным методом.

[12] (278) Формула, устанавливающая равенство выражений (5.15) и (6.5), впервые доказана G. Jacobi; см. Muir, Theory of Determinants I (1906), стр. 341. О более поздних работах Trüdi, Naegelsbach'а и Kotska — там же, III (1920), стр. 135, и IV (1923), стр. 145. Обобщение недавно предложил Aitken, Proc. Edinb. Math. Soc. 1 (1927), стр. 55; 2 (1930), стр. 164.

[13] (278) Впервые установлена И. Шуром в его диссертации, Berlin, 1901,

[14] (284) Доказательство теоремы (VII.6.F), как и соответствующих теорем для других классических групп, является упрощенной версией способа, которому я следовал в работе, помещенной в Acta Math. 48, стр. 255.

[15] (284) Sitzungsber. Preuss. Akad., 1900, стр. 516. По поводу других прямых алгебраических методов см. I. Schur, Dissertation, Berlin, 1901, и работы Шура в Sitzungsber. Preuss. Akad. 1908, стр. 664, и 1927, стр. 58.

[16] (292) Am. Journ. of Math. 59 (1937), стр. 437. См. также F. D. Murnaghan, Am. Journ. of Math. 59 (1937), стр. 739; 60 (1938), стр. 44, и G. de B. Robinson, Am. Journ. of Math. 60 (1938), стр. 745.

[17] (293) Math. Zeitschr. 23 (1925), стр. 300.

[18] (293) I. Schur, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1908, стр. 664. Ср. резюме в работе W. Specht, Math. Zeitschr. 39 (1935), стр. 696. Родственные исследования: A. Joung, Proc. London Math. Soc. (1) 34 (1902), стр. 361. D. E. Littlewood and A. R. Richardson, Phil. Transact. Roy. Soc. (A) 233 (1934), стр. 99; Quart. Journ. of Math. (Oxford) 5 (1934), стр. 269. D. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc. (2) 39 (1936), стр. 150; (2) 40 (1936), стр. 49; (2) 43 (1937), стр. 226.

[19] (298) Ср. вторую из моих работ по теории представлений полупростых групп, Math. Zeitschr. 24 (1925), стр. 328.

[20] (302) В Math. Zeitschr. 24 (1925), стр. 328, я рассматривал собственно ортогональную группу. Добавленное мною в Acta Math. 48, стр. 255, для охвата случая полной ортогональной группы следует заменить изложением, данным здесь. Более алгебраический вывод характеров служит предметом диссертации R. Brauer'а „Ueber die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen“, Berlin, 1925.

[21] (310) Комбинаторный подход и „производящая функция строк“ легко переносятся как на симплектическую, так и на ортогональную группы. Ср. F. D. Murnaghan, Nat. Ac. of Sciences 24 (1938), стр. 184. Формула для числа инвариантов ($f_a = 0$) является здесь, как и в симплектическом случае, см. (8.13), непосредственным следствием первой основной теоремы. И. Шур в его работах в Sitzungsber. Preuss. Akad. 1924, открывших применение метода интегрирования к теории групп, вывел из этого уравнения формулы (9.7), (9.15) для меры объема на ортогональной группе, полученные нами прямым геометрическим вычислением.

[22] (312) Формула для ортогональной группы впервые дана Р. Брауэром в его диссертации, Berlin, 1925. Оба мы уже долгое время знали, что та же формула справедлива для любой полупростой группы; здесь я даю мое доказательство. См. заметку Брауэра в Comptes rendus 204 (1937), стр. 1784. Явное правило для кронекеровского перемножения двух неприводимых представлений $\langle P(f_1 \ldots f_n)\rangle$, $\langle P(f'_1 \ldots f'_n)\rangle$ полной линейной группы см. в работе D. E. Littlewood and A. R. Richardson, Phil. Trans. Roy. Soc. (A) 233 (1934) стр. 99. См. также F. D. Murnaghan, Am. Journ. of Math. 60 (1938) стр. 761.

[23] (316) Comptes Rendus 201 (1935), стр. 419. Э. Картан правильно угадал результат еще раньше: Ann. Soc. Polon. de Math. 8 (1929), стр. 181. См. подробные замечания самого Р. Брауэра в мимеографированных записках моих лекций „On the Structure and Representations of Continuous Groups II“, Princeton, 1934—1935.

## ГЛАВА VIII

[1] (322) Из руководств, составленных в классической традиции, укажем: I. H. Grace and A. Joung, The Algebra of Invariants, Cambridge, 1903; Glenn, The Theory of Invariants, Boston, 1915; L. E. Dickson, Algebraic Invariants, New Jork, 1913. Большей свободой в вопросе о полагаемой в основу группе преобразований отличается монография R. Weitzenböck, Invariantentheorie, Groningen, 1923.

[2] (326) H. Weyl, Rend. Circ. Mat. Palermo 48 (1924), стр. 29.

[3] (335) См., напр., I. H. Grace and A. Joung, The Algebra of Invariants, Cambridge, 1903, стр. 89—91, 96—97. Рассмотренный результат впервые получил Кэли в его Memoirs on Quantics.

[4] (338) D. Hilbert, Math. Ann. 36 (1890), стр. 473—534, = Gesammelte Abhandlungen II, Berlin, 1933, No. 16: „Ueber die Theorie der algebraischen Formen“, теоремы I и II на стр. 199 и 211. Ван дер Варден, Современная алгебра II, 2-е изд., стр. 27—29. Конечность базиса для каждого идеала в $R$ эквивалентна „теореме о цепях делителей“ Э. Нётер, см. 1. с., стр. 30—31.

[5] (341) Решающие факты даны в работе Гильберта, указанной в [4], включая теорию сизигий, в которую мы здесь не входим. Более детальное исследование кольца инвариантов и его поля отношений, имеющее своей целью более финитное построение целого рационального базиса, содержится в последующей работе Гильберта: „Ueber

die vollen Invariantensysteme", Math. Ann. 42 (1893), стр. 313—373, = Gesammelte Abhandlungen II, No. 19, стр. 287—344. По поводу более простого доказательства его „теоремы о нулях" (стр. 294) см. A. Rabinowitsch, Math. Ann. (102) 1929, стр. 518, и ван дер Варден, „Современная алгебра" II, 2-е изд., стр. 11, „Нулевое многообразие" состоит из систем значений $u, v, \dots$, для которых обращаются в нуль все инварианты $J(u, v, \dots)$, не сводящиеся к постоянной, и построение его как пересечения $J_1=0, \dots, J_h=0$, определяемого несколькими инвариантами $J_1, \dots, J_h$, веса которых могут быть ограничены a priori, играет важную роль. В этой связи полезен общий критерий конечности, принадлежащий Э. Нётер: Nachr. Gött. Ges. Wissensch. 1926, стр. 28.

[6] (342) Идея присоединения всюду подчеркивается в Эрлангенской программе Ф. Клейна.

[7] (346) Это понятие принадлежит О. Шрейеру, Abh. Math. Sem. Hamburg, 4 (1926), стр. 15, и 5 (1927), стр. 233.

[8] (347) См. H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig, 1913 (и 1923), § 9. Идея универсального накрывающего многообразия восходит к Шварцу и Пуанкарэ (H. Poincaré, Bull. Soc. Math. de France 11 (1883), стр. 113—114). Генетическое построение см. у P. Koebe, Journ. reine angew. Math. 139 (1911), стр. 271—276. По поводу топологического исследования непрерывных групп вообще см. две брошюры Э. Картана: La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs, Mém. des. Sciences Math. 42, Paris, 1930, и La topologie des groupes de Lie, Actual. Scient. 358, Paris, 1936.

[9] (349) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, 3 тома, Leipzig, 1893. Более новые изложения: H. Weyl, Appendix 8 в Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin, 1923; L. P. Eisenhart, Continuous Groups of Transformations, Princeton, 1933; W. Mayer and T. Y. Thomas, Ann. of Math. 36 (1935), стр. 770. Упрощенная переработка наиболее важных частей работы Э. Картана по инфинитезимальным группам (см. гл. II [8]) дана в работах автора в Math. Zeitschr. 23 и 24 (1925—1926); см. также van der Waerden, Math. Zeitschr. 37 (1933), стр. 446. Центральным пунктом этих исследований, поскольку они имели дело со структурой, а не представлениями групп, было построение всех (полу-) простых алгебр Ли над $K^\dagger$ (или более обще, над алгебраически замкнутым полем). Ту же проблему для произвольного поля в последнее время успешно рассматривали N. Jacobson, Ann. of Math. 36 (1935), стр. 875; 38 (1937), стр. 508; Proc. Nat. Ac. of Sciences 23 (1937), стр. 240, и W. Landherr, Abh. Math. Sem. Hamburg 11 (1935), стр. 41. Если задана ассоциативная алгебра $\mathfrak{a}=\{a\}$ с инволютивным антиавтоморфизмом $J$: $a \to a^J$, то ее $J$-косые элементы $a$, т. е. элементы, удовлетворяющие условию $a^J=-a$, образуют алгебру Ли с умножением $[ab]=ab-ba$; этот способ построения алгебр Ли зарекомендовал себя как способ первостепенной важности.

[9a] (350) Для групп Ли это сомнение разрешил Э. Картан, Actual. Scient. 358 (1936), стр. 19.

[10] (358) I. Schur, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1928, стр. 96.

[11] (359) H. Weyl, Math. Zeitschr. 24 (1926), стр. 348—353.

[12] (359) E. Mohr, Диссертация, Göttingen, 1933.

[13] (359) R. Brauer, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1929, стр. 3.

[14] (359) J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 30 (1929), стр. 3, E. Cartan, Mémor. Sc. Math. 42, 1930, стр. 22—24.

[15] (360) Принадлежащий автору первоначальный вывод связности классических групп в Math. Zeitschr. 23 (1925), стр. 291, и 24 (1925), стр. 337 и 346, более сложен. Относительно произвольных полупростых групп см. там же, 24 (1925), стр. 380; E. Cartan, Annali di Mat. (4) 4 (1926—1927), стр. 209, и (4) 5 (1928), стр. 253; Weyl, мимеографированные записки лекций о структуре и представлениях непрерывных групп II, Princeton, 1934—1935, стр. 155—185.

[16] (362) E. Cartan, Bull. Soc. Math. de France 41 (1913), стр. 53; P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 117 (1927), стр. 610; 118 (1928), стр. 351; R. Brauer and H. Weyl, Am. Journ. of Math. 57 (1935), стр. 425. Детальное геометрическое изучение проблемы проведено в мимеографированных записках On the Geometry of Complex Domains by O. Veblen and J. W. Givens, Princeton, 1935—1936.

[17] (362) Получаемую ниже алгебру ввел W. K. Clifford по крайней мере в 1878 г.: Am. Journ. of Math. 1 (1878), стр. 350, = Math. Papers, стр. 271. H. Witt дал интересное применение ее к изучению квадратичных форм над произвольными полями, Journ. reine angew. Math. 176 (1937), стр. 31.

[18] (369) Неудачные попытки сделали L. Maurer, Bayer. Akad. Wissensch. 29 (1899), стр. 147; Math. Ann. 57 (1903), стр. 265, и R. Weitzenböck, Acta Math. 58 (1932), стр. 231. Работа Вейценбёка содержит правильное доказательство для каждого отдельного линейного преобразования. Посредством интересного прямого алгебраического подхода E. Fischer, Journ. reine angew. Math. 140 (1911), стр. 48, разрешает вопрос в $K^{\dagger}$ для любой линейной группы, содержащей вместе с каждым ее элементом $A$ также сопряженный к транспонированному $\bar{A}^*$.

[19] (369) E. Noether, Math. Ann. 77 (1916), стр. 89. Тот же результат для конечных групп в поле простой характеристики (делящей порядок группы): E. Noether, Nachr. Gött. Ges. Wissensch. 1926, стр. 28. Проективные инварианты mod $p$ рассматривали ранее L. E. Dickson и его школа: On Invariants and the Theory of Numbers, Madison Colloquium 1913, и различные работы в последующие годы в Transact. Am. Math. Soc.

[20] (370) E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, Paris, 1922; Ann. Soc. Polon. de Math. 8 (1929), стр. 181; E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig, 1934; J. H. C. Whitehead, Quart. Journ. of Math. (Oxford) 8 (1937), стр. 220.

[21] (371) Совпадение обоих определений доказал G. de Rham в его Thèse, Paris, 1931 (= Journ. Math. pures et appl. (9) 10 (1931), стр. 165), где он подробно излагает основы этой теории.

[22] (371) J. W. Alexander, Ann. of. Math. 37 (1936), стр. 698. Та же идея была высказана А. Н. Колмогоровым на топологической конференции в Москве в сентябре 1935 г. Кроме того, E. Čech, Ann. of Math. 37 (1936), стр. 681.

[23] (374) Прямой топологический подход: L. Pontrjagin, Comptes Rendus 200 (1935), стр. 1277.

## ГЛАВА IX

[1] (375) Я следую своему методу, излож. в Ann. of Math. 37 (1936), стр. 743—745, и 38 (1937), стр. 477—483. По поводу абстрактной трактовки см. ван дер Варден, Современная алгебра II, 2-е изд., стр. 189—195, 233—240; Deuring, Algebren, Ergebn. Math. 4:1, Berlin, 1935, и указанная там литература. Особенно важна работа E. Noether, Math. Zeitschr. 37 (1933), стр. 514.

[2] (378) Впервые доказал Th. Skolem, Shr. norske Vid.-Akad., Oslo, 1927.

[3] (385) R. Brauer, Journ. reine angew. Math. 166 (1932), стр. 241; 168 (1932), стр. 44.

[4] (388) Ср. R. Brauer and E. Noether, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1927, стр. 221. По поводу связанных с этим „скрещенных произведений“ Э. Нётер и „систем факторов“ Р. Брауэра см. H. Hasse, Transact. Am. Math. Soc. 34 (1932), стр. 171; R. Brauer, Math. Zeitschr. 28 (1928), стр. 677; 31 (1930), стр. 733; также Weyl, Ann. of Math. 37 (1936), стр. 723—728, и Deuring, l. c.

[5] (388) ван дер Варден, Современная алгебра II, 2-е изд., стр. 189—190 J. H. M. Wedderburn, Ann. of Math. 38 (1937), стр. 854;

# АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## *Глава III*

## МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ И ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА

### А. ТЕОРИЯ ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР

## *Глава IV*

## СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА И ПОЛНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА

## *Глава V*

## ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА

### C. СОБСТВЕННО ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА

## Глава VI

## СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППА

## Глава VII

## ХАРАКТЕРЫ

## Глава VIII

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

### А. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### В. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

## Глава IX

## СНОВА О МАТРИЧНЫХ АЛГЕБРАХ

50

---

Редактор *И. М. Яглом*

Техн. редактор *А. П. Дронов*. Корректоры *Б. А. Ерусалимский*
и *М. М. Шулименко*

Сдано в производство 11/IV—1947 г. Подписано к печати 15/VII 1947 г. А-00417
Печ. л. $25^1/_2$, уч.-изд. 23. Формат 60×$92^1/_{16}$, изд. № $^1/_2$ Заказ № 398. Цена 24 руб.
Набрано и сматрицировано в 1-й Образцовой типографии треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

Отпечатано в 3-й типографии «Красный пролетарий» треста «Полиграфкнига»
ОГИЗа при Совете Министров СССР. Москва, Краснопролетарская, 16.